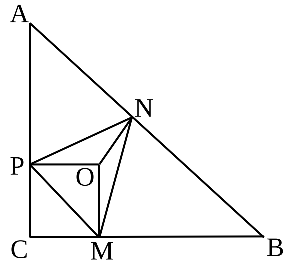
9 класс

№1.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, которая касается гипотенузы AB в точке N, а катетов – в точках P и M. Найдите площадь треугольника PNM, если известно, что $AN = 12$, $BN=5$.



Дано:
$\Delta ABC, \angle C = 90°$
$AN = 12, BN = 5$
Найти: S_{PNM}.
Решение:

1) Пусть x – радиус вписанной окружности $OPCM$ – квадрат, тогда $PC = CM = x$.
2) $AP = AN,\ MB = BN$, как длины отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки.
3) По теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$
$(x+5)^2 + (x+12)^2 = 17^2$
$x^2 + 10x + 25 + x^2 + 24x + 144 = 289$
$x^2 + 17x - 60 = 0$
$x_1 = -20, x_2 = 3.$
Итак, $PC = CM = r = 3$.
4) Из ΔABC: $AC = 8; CB = 15; AB = 17$
$\sin A = \frac{CB}{AB} = \frac{15}{17}$; $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$
5) $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$
$S_{PNA} = \frac{1}{2} AP \cdot AN \cdot \sin A = \frac{1}{2} 5 \cdot 5 \cdot \frac{15}{17} = \frac{375}{34}$
$S_{MNB} = \frac{1}{2} BN \cdot BM \cdot \sin B = \frac{1}{2} 12 \cdot 12 \cdot \frac{8}{17} = \frac{1152}{34}$
$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} 8 \cdot 15 = 60$
$S_{PCM} = \frac{1}{2} PC \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$
$S_{PNM} = S_{ABC} - S_{PCM} - S_{APN} - S_{MNB} = 60 - \frac{375}{34} - \frac{1152}{34} - \frac{9}{2} = \frac{180}{17}$.
Ответ: $S_{PNM} = \frac{180}{17}$.

№2.

Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом – два отрицательных?

Решение: Нет, таких чисел не существует. Поскольку квадратный трехчлен с положительными корнями имеет коэффициенты разных знаков, а с отрицательными – одинаковых знаков. При перестановке коэффициентов их знаки не изменяются.
Пример. $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ коэффициенты 1; -3; 2.
$(x+1)(x-2)=x^2+3x+2$ коэффициенты 1; 3; 2.

№3.

Разложите многочлен на множители $x^4+2016x^2+2015x+2016$.

Решение: $x^4+2016x^2+2015x+2016=(x^2+x+1)(x^2-x+2016)$

№4.

Джафар нашел волшебную сокровищницу, которая открывается 1 раз в году. Добраться до нее можно на ковре-самолете грузоподьемностью 200 кг. Джафар весит 90 кг, сундук для сокровищ 10 кг. Полный сундук золота весит 210 кг, полный сундук алмазов – 50 кг. Килограмм золота стоит на базаре 20 тугриков, килограмм алмазов – 60 тугриков. Какое наибольшее количество денег может получить Джафар за драгоценности, которые он добудет из сокровищницы?

Решение: Джафар может увезти 100 кг сокровищ: 200-90-10=100. В сундук влезает 200 кг золота и 40 кг алмазов. Если *x* кг золота и *y* кг алмазов увозит Джафар, то

(1)$x+y\le 100$ и $\frac{x}{200}+\frac{y}{40}\le 1$ (1 кг золота занимает $\frac{1}{200}$ сундука и 1 кг алмазов $\frac{1}{40}$ сундука)

откуда

(2)$x+5y\le 200$.

Сложим (1) и (2):

$2x+6y\le 300$, умножим на 20.

$20x+60y\le 3000$, получили ограничение на деньги.

Значит Джафар получит не более 3000 тугриков. Равенство достигается при $x=75, y=25$.
Ответ: $x=75, y=25$.

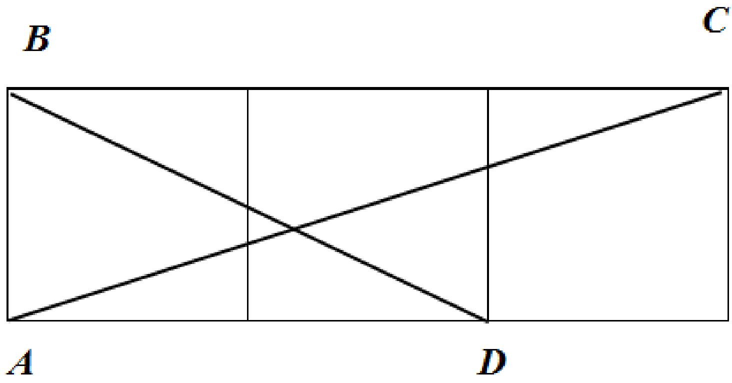
№5.

Найдите три последние цифры числа $11^{2016}\cdot 7^{2015}\cdot\ 13^{2017}$.

Решение: Заметим, что$11\cdot 7\cdot 13=1001$.
Значит $11^{2016}\cdot 7^{2015}\cdot 13^{2017}=(11\cdot 7\cdot 13)^{2015}\cdot 11\cdot 13^2=(1001)^{2015}\cdot 1859$.
$(1001)^{2015}$ будет оканчиваться на 001.
Откуда $(1001)^{2015}\cdot 1859=(1000k+1)(1000+859)=1000\cdot e+859$
Ответ: 859.

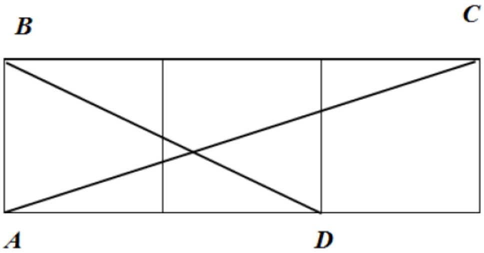
№6.

Три квадрата расположены как на рисунке:



Найдите угол между прямыми AC и BD.

Решение: Введем систему координат и примем длину сторон квадрата за 1



Получим: $A(0;0), C(3;1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}\{3;1\}, B(0;1), D(2;0) \Rightarrow \overrightarrow{BD}\{2;-1\}$.

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Ответ: $\alpha = 45°$.