9 класс

№1

Доказать, что $4 \cdot 20^{16} + 1$ – составное число.

Решение:

Докажем тождество и используем его для доказательства того, что

$4 \cdot 20^{16} + 1$ – составное число

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2$$
$$= (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$$

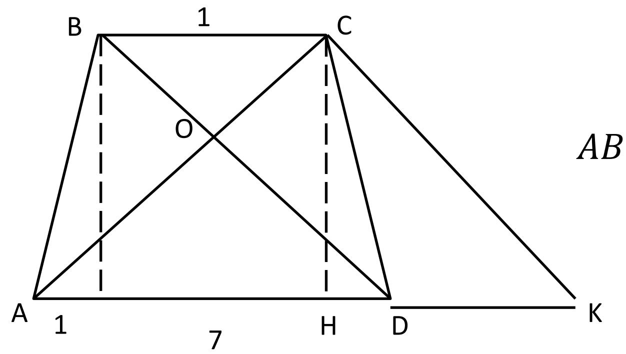
Если x=20^{16}, имеем

$4 \cdot 20^{16} + 1 = (2 \cdot 20^8 - 2 \cdot 20^4 + 1) \cdot (2 \cdot 20^8 + 20 \cdot 20^4 + 1)$ что и доказывает то, что $4 \cdot 20^{16} + 1$ является составным.

№2

Дана равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 7. Известно, что диагонали трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции и радиус описанной около нее окружности.

Решение:



Дано:

$ABCD$ – трапеция; $AB = CD$

$AD = 7, BC = 1,$

$AC \perp BD$

Найти: S и R.

1. Отложим $DK = 1$ на прямой AD. Тогда $BCKD$ – параллелограмм ($BC \parallel KD;\ BC = KD = 1$), откуда $BD \parallel CK$ и $BD = CK$.
2. Рассмотрим ΔACK: $CK \parallel BD$ и $AC \perp BD \Rightarrow CK \perp AC$. Значит ΔACK – прямоугольный и равнобедренный. $AK = AD + DK = 8$.
3. Если AC = x, то, по теореме Пифагора: $AC^2 + CK^2 = AK^2$, $x^2 + x^2 = 64$, $x^2 = 32$, x=$4\sqrt{2}$.
4. Найдем высоту CH:

AH=CH. $AH^2+CH^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$, $(AH)^2=4^2$, AH=4

5. Площадь трапеции будет равна $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CH$; $S=\frac{8}{2}\cdot 4=16$.

6. Найдем радиус окружности, описанной вокруг ΔACD. В силу симметрии, эта окружность будет описанной и вокруг трапеции ABCD.

$R=\frac{abc}{4S}$.

7. Для вычислений найдем третью сторону. Так как трапеция является равнобедренной, имеем HD=$\frac{AD-BC}{2}=3$;

из ΔCDH: $CD=\sqrt{HD^2+CH^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$; $R=\frac{5\cdot 4\sqrt{2}}{32}\cdot 7=\frac{35\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{35\sqrt{2}}{8}$.

№3

В сосуде было 12 литров кислоты. Часть ее отлили и долили водой до 12 литров. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. В результате чего в сосуде оказался 25°/о раствор кислоты. Сколько жидкости отливали несколько раз?

Решение:

Поскольку отливали раствор и доливали его водой, то концентрация раствора уменьшалась в одно и то же количество раз. Пусть в k раз.

$k^2=0{,}25$;

$k=0{,}5$.

Концентрация уменьшилась вполовину за 1 раз, значит отлили половину кислоты.

Ответ: 6 л.

№4

Представьте число 2016 в виде суммы арифметической или геометрической прогрессий натуральных чисел с числом членов не менее трех. Учитываются прогрессии каждого вида с различным числом членов (за каждый пример 1 балл).

Примеры последовательностей.

$$2016 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7$$

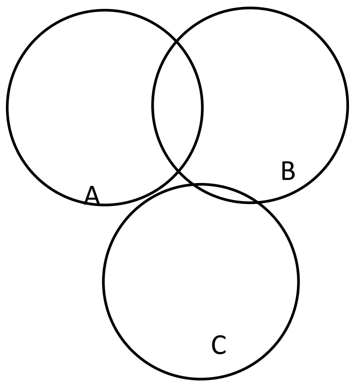
$$2016 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 63$$

$$2016 = 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 + 101 + 102 + 103 + 104 + 105 + 106$$

№ 5

Сколькими способами можно расставить на полке 8 разных учебников, среди которых 2 по математике, 2 по русскому языку, 2 по информатике, по одному по географии и истории, так, чтобы учебники по одному предмету не стояли рядом.

Решение:



Узнаем, сколькими способами можно расставить учебники так, чтобы учебники по одному предмету стояли рядом.

Пусть A-множество расстановок, при которых учебники по математике стоят рядом; B-множество расстановок, при которых учебники по русскому языку стоят рядом; C - множество расстановок, при которых учебники по географии стоят рядом.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$|A|$-количество расстановок, в которых учебники по математике стоят рядом (т.е в одной суперобложке). 2!-столькими способами можно переставить учебники внутри суперобложки.

$$|A| = 7! \cdot 2!$$

Аналогично $|B| = 7! \cdot 2!$

$|C| = 7! \cdot 2!$

Если учебники по математике и русскому языку стоят рядом, то тут как будто 6 учебников, из которых пары по математике и русскому языку в суперобложках $|A \cap B| = 6! \cdot 2! \cdot 2!$

Аналогично $|B \cap C| = |A \cap C| = 6! \cdot 2! \cdot 2!$

Рассуждая подобным образом, имеем $|A \cap B \cap C| = 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$

$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 7! \cdot 2! - 3 \cdot 6! \cdot (2!)^2 + 5! \cdot (2!^3) = 120 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 4 + 8) = 120 \cdot (252 - 72 + 8) = 22560.$

Для того, чтобы подсчитать количество расстановок, удовлетворяющие условию задачи, заметим, что количество способов расставить 8 книг на полке равна $P(8) = 8!$

N=$8! - 22560 = 40320 - 22560 = 17760.$

Ответ: 17760.

№ 6

Имеется 5 ящиков. В некоторых из них лежат по 6 ящиков меньшего размера, а в некоторых из меньших ящиков лежат еще по 6 ящиков и т.д. Сколько всего ящиков, если заполненных оказалось 25? (Заполненным считается ящик, в котором находится хотя бы один ящик меньшего размера).

Решение:

Найдем количество ящиков, которые лежат в ящиках большего размера 25·6=150;

Добавим к нему количество ящиков, которые ни в чем не лежат. Таких 5. Всего 150+5=155 ящиков.