

Заключительный этап

7-8 класс

№1

Докажите, что $3973^3 - 1957^3$ делится на 2016.

Решение:

Воспользуемся формулой сокращенного умножения.

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Тогда

$$3973^3 - 1957^3 = (3973 - 1957) \cdot (3973^2 + 3973 \cdot 1957 + 1957^2) = 2016 \cdot 27389739, \text{ что и доказывает утверждение.}$$

№2

Для награды победителей олимпиады приобретены 4 книги. Все книги без первой стоят 840 рублей, без второй 800 рублей, без третьей 760 рублей, без четвертой 720 рублей. Какова стоимость каждой книги?

Решение:

Пусть x - стоимость 1-й книги,

y - стоимость 2-й книги,

z - стоимость 3-й книги,

t - стоимость 4-й книги,

$$\text{тогда } y + z + t = 840$$

$$x + z + t = 800$$

$$x + y + t = 760$$

$$x + y + z = 720.$$

Складывая уравнения, получим:

$$3 \cdot (x + y + z + t) = 3120;$$

$$x + y + z + t = 1040.$$

Сумма всех книг равна 1040, значит $x = 200$, $y = 240$, $z = 280$, $t = 320$.

№3

Злостный двоечник Петухов вырвал из дедушкиной энциклопедии несколько страниц подряд. Известно, что у вырванных страниц номера первой страницы и последней страницы состоят из одних и тех же цифр. Сколько листов было вырвано листов, если первая вырванная страница имела номер 523?

Решение:

Последняя страница из вырванных должна быть четной, иметь номер больше 523. Такое число только одно. Это 532.

Было вырвано страниц:

$$532-523+1=10$$

10 страниц-5 листов

Ответ: вырвано 5 листов.

№4

Шерлок Холмс и доктор Ватсон шагают по дороге из деревни в поместье Баскервилей. Расстояние между деревней и поместьем равно 1 км 620м. Для того чтобы пройти 72 м, доктору Ватсону нужно сделать ровно 90 шагов, а Шерлоку Холмсу – ровно 80 шагов. На сколько шагов больше сделает за весь путь левой ногой доктор Ватсон, чем Шерлок Холмс, если они оба начали шагать с левой ноги?

Решение

Найдем длину шага Шерлока Холмса и доктора Ватсона.

	Расстояние 1	Кол-во шагов	Длина шага	Расстояние 2	Кол-во шагов	Левой ногой
Холмс	72	80	0,9	1620	1800	900
Ватсон	72	90	0,8	1620	2025	1013

Сделав 2025 шагов, Ватсон сделал 1013 шагов левой ногой и 1012 шагов правой.

Найдем разницу в количестве шагов левой ногой.

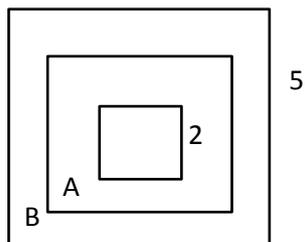
$$1013 - 900 = 113.$$

Ответ. 113.

№5

Три квадрата вложены друг в друга без пересечений границ. Сторона меньшего квадрата равна 2, а большего – 5. Найдите сторону среднего квадрата, если известно, что он делит площадь фигуры, заключенной между меньшим и большим квадратами в отношении 4:3.

Решение:



Пусть сторона среднего квадрата равна x , тогда площадь фигуры А равна $x^2 - 4$, а площадь фигуры В равна $25 - x^2$.

Составим и решим пропорцию:

$$\frac{x^2 - 4}{25 - x^2} = \frac{4}{3};$$

$$3(x^2 - 4) = 4(25 - x^2);$$

$$3x^2 - 12 = 100 - 4x^2;$$

$$7x^2 = 112;$$

$$x^2 = 16;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

№6

Расставьте скобки и знаки арифметических действий между семью семерками, чтобы получилось верное равенство $2016 = 7 7 7 7 7 7 7$

Решение:

$$2016 = 7 \cdot (7 \cdot (7 \cdot 7 - 7) - 7) + 7.$$