10-11 класс

№ 1

Решение уравнения $2|x-1|\sin x = x-1$.

Решение:

I. Если $x=1,$ то $0sin\,x=0,\ \ x=1$-корень.

II. Если $x>1,$ то $2(x-1)\sin x = x-1;$ т.к. $x\neq 1$ разделим на $x-1$, получим $2\sin x=\frac{1}{2};\ x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z;$

$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$

Отбором корни, удовлетворяющие условию $x>1$

а) Пусть $k=0$, тогда $x_1=\frac{\pi}{6}<1$ – не подходит;

$x_2=\frac{5\pi}{6}>1$ – подходит.

б) Пусть $k=1$, тогда $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi>1$ – подходит;

$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi>1$ – подходит.

$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\geq 1, k\in Z;\ x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\geq 0, k\in Z.$

III. Если $x<1,$ то $2(1-x)\sin x = x-1,$ т.к. $x\neq 1$ разделим на $1-x$, получим $2\sin x=-1$, $\sin x=-\frac{1}{2}$,

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z;$

$x_2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$

а) Пусть $k=0$, тогда $x_1=-\frac{\pi}{6}<1$ – подходит;

$x_2=-\frac{5\pi}{6}<1$ – подходит.

б) Пусть $k=1$, тогда $x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi>1$ – не подходит;

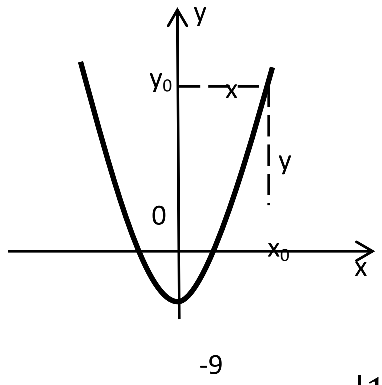
$x_2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi>1$ – не подходит.

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\leq 0;\ x_2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\leq 0, k\in Z.$

Ответ. $x_1=1;\ x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\geq 1;\ \ x_3=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\geq 0;\ \ x_4=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\leq 0;\ x_5=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\leq 0, k\in Z.$

1. Найдите абсциссы всех тех точек графика функции

$F(x) = 10x^2 - 9$, расстояние каждой из которых до оси абсцисс не больше расстояния до оси ординат.



Решение:

$F(x) = 10x^2 - 9;$

$|y| \leq |x|;$

$|10x^2 - 9| \leq |x|;$

$|10x^2 - 9| - |x| \leq 0.$

Умножим правую и левую часть неравенства на $|10x^2 - 9| + |x|$. Это положительное число.

$(10x^2 - 9)^2 - x^2 \leq 0;$

$(10x^2 - x - 9)(10x^2 + x - 9) \leq 0;$

$(10x^2 - x - 9)(10x^2 + x - 9) = 0;$

1) $10x^2 - x - 9 = 0;$

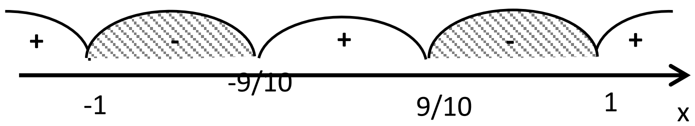
$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{20} = \frac{1 \pm 19}{20};$

$x_1 = -\frac{9}{10}; x_2 = 1;$

2) $10x^2 + x - 9 = 0;$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{20} = \frac{-1 \pm 19}{20};$

$x_1 = -1; x_2 = \frac{9}{10};$



$x \in \left[-1; -\frac{9}{10}\right] \cup \left[\frac{9}{10}; 1\right].$

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{9}{10}\right] \cup \left[\frac{9}{10}; 1\right].$

№ 2

Решите неравенство: $13x^{13} + 7x^7 + 5x^5 + x + 26 < 0$.

Решение:

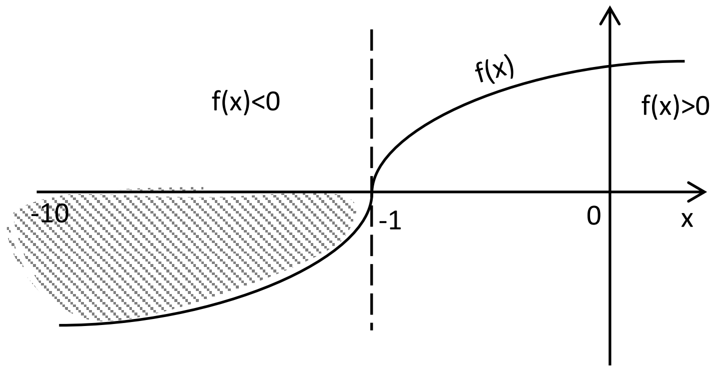
Покажем, что $f(x) = 13x^{13} + 7x^7 + 5x^5 + x + 26$ – монотонная дифференцируемая функция. Исследуем с помощью производной.

$f'(x) = 169x^{12} + 49x^6 + 25x^4 + 1 > 0$. Поскольку это сумма одночленов чётной степени и положительного числа.

Следовательно $f(x)$ – возрастает на всей числовой оси. Это значит, что существует единственная точка, обращающая $f(x)$ в 0.

Угадаем это x_0: $x_0 = -1$ $(-13 - 7 - 5 - 1 + 26 = 0)$.

Значит левее $x = -1$, $f(x) < 0$.

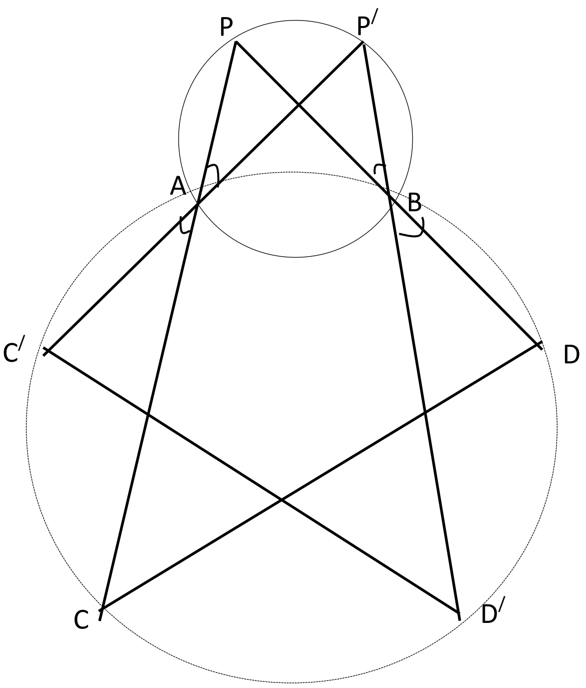


Ответ. $x < -1$.

№ 3

Предположим, что две окружности пересекаются в точках A и B. Точка P лежит на дуге второй окружности, расположенной вне первой окружности. Хорды PA и PB продлены до пересечения с первой окружностью в точках C и D. Докажите, что длина получившейся хорды CD не зависит от расположения точки P на второй окружности.

Решение:



Решение:

1. Построим на второй окружности точку P' и проведем отрезок $P'C'$через точку А и отрезок $P'D'$ через точку В как показано на рисунке.

2. Заметим, что $\angle PAP' = \angle PBP'$(т.к они опираются на одну дугу PP'). $\angle C'AC = \angle PAP'$ (как вертикальные)

$\angle PBP' = \angle DBD'$ (как вертикальные)

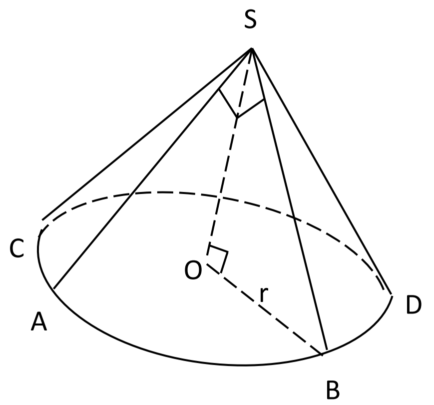
Следовательно, $\angle C'AC = \angle DBD'$, значит и $\smile CC' = \smile DD'$, т.к на них опираются равные углы.

3. Заметим равенство $\smile CC' + \smile CD' = \smile CD' + \smile D'D$, т.к $\smile CD'$ - общая, и $\smile C'C = \smile D'D$, но $\smile C'C + \smile CD' = \smile C'D'$; $\smile DD' + \smile CD' = \smile CD \Rightarrow \smile CD = \smile C'D'$, значит и хорды $CD = C'D'$, получается что длина CD не зависит от точки P(её расположения), что и требовалось доказать.

№ 4

Две перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1:2. Найдите объем конуса, если его высота равна 4.

Решение:



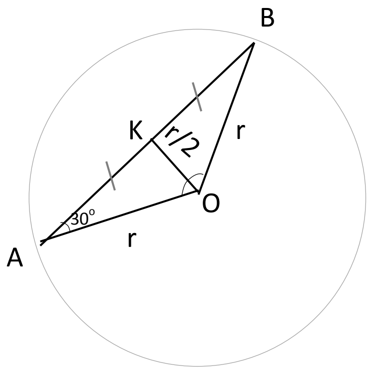
Дано: прямой конус SED

SA и SB – образующие,

$SA \perp SB$, А и В делят

окружность как 1:2, $h= 4$

Найти: $V_{\text{конуса}}$-?



1. Объем конуса найдём по формуле $V = \frac{1}{3}h\pi r^2$; неизвестен радиус основания.
2. $\smile AB = \frac{360^{\circ}}{3} = 120° \Rightarrow \angle AOB = 120°$,т.к опирается на дугу в 120°.
3. Рассмотрим ΔAOB:

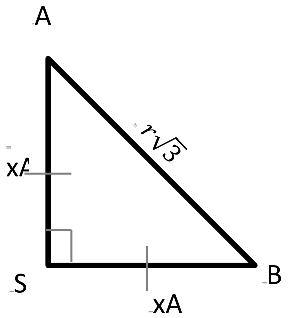
$AO = OB = r$; $\angle AOB = 120° \Rightarrow \angle A = \left(\frac{180°-120°}{2}\right) = 30°$.

4. Проведем высоту $OK. OK \perp AB; AK = KB$ т.к OK - медиана ($\angle AOB -$ равнобедренный) т.к $\angle A = 30°$, то $KO = \frac{1}{2}r$; по теореме о катете, лежащем против $\angle 30°$

5. Рассмотрим ΔAOK: $AO = r; OK = \frac{r}{2}$. По теореме Пифагора найдем AK:

$AK = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

6. $AB = 2AK, AB = r\sqrt{3}$



7. Рассмотрим ΔSAB: $\angle S = 90°; AS = SB$ т.к. это образующие, $AB = r\sqrt{3}$. Пусть $x = SB$, тогда по теореме Пифагора выразим x^2: $x^2 + x^2 = 3r^2;\ 2x^2 = 3r^2;\ x^2 = \frac{3r^2}{2}$.

8. Рассмотрим ΔSOB: $SO -$ высота $= h$ т.к. конус прямой. $SB -$ гипотенуза, $\angle SOB = 90°, OB = r$. По теореме Пифагора найдем SB:

$SB^2 = SO^2 + OB^2,\ SB^2 = r^2 + h^2$

9. Но $SB^2 = \frac{3r^2}{2} \Rightarrow \frac{3r^2}{2} = r^2 + h^2;\ \frac{3r^2}{2} - r^2 = h^2;\ \ \frac{1}{2}r^2 = h^2;\ r^2 = 2h^2;$ $r^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$.

10. $V = \frac{1}{3}h\pi r^2;\ V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 32 = \frac{128\pi}{3}$

Ответ: $V = \frac{128\pi}{3}$.