

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, длина ребра которого равна a . На ребре AA_1 взята точка E так, что $AE = a/4$. Найти объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1 , а основанием – сечение куба, проходящее через точки D, E и произвольную внутреннюю точку ребра BB_1 .

2. Найти расстояние между ближайшими точками графиков функций:

$$y = -3x^2 + 8x - 9, \quad y = x^2 + 8x + 13.$$

3. Шестизначное число делится на 37. Все его цифры различны. Доказать, что из тех же цифр можно составить другое шестизначное число, также делящееся на 37.

4. При каких значениях x и y последовательность v_1, v_2, v_3 , где $v_1 = 8^{x+\log_2 y}$, $v_2 = 2^{x-\log_2 y}$, $v_3 = 5y$ является одновременно арифметической и геометрической прогрессиями?

5. Доказать тождество
$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

6. Прямая, параллельная основанию треугольника, площадь которого равна S , отсекает от него треугольник с площадью, равной q . Определить площадь четырёхугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, четвёртая лежит на основании большего треугольника.

II вариант

1. Дан куб $MNKL M_1 N_1 K_1 L_1$, длина ребра которого равна m . На ребре MM_1 взята точка P так, что $MP = 0,4m$. Найти объём пирамиды, вершиной которой является точка M_1 , а основанием – сечение куба, проходящее через точки L, P и произвольную внутреннюю точку ребра NN_1 .

2. Найти расстояние между ближайшими точками графиков функций:

$$y = 3x^2 + 8x + 5, \quad y = -x^2 + 8x - 17$$

3. Докажите следующий признак делимости на 37. Для того чтобы узнать, делится ли число на 37, надо разбить его на группы справа налево, по три цифры в каждой группе. Если сумма полученных трёхзначных чисел делится на 37, то и данное число делится на 37. (Слово «трёхзначное» употреблено условно: некоторые из групп могут начинаться с нулей и быть на самом деле двузначными или однозначными числами; не трёхзначным числом будет и сама левая группа, если количество цифр нашего числа не делится на три.)

4. Найдите углы α, β, γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

5. Доказать тождество
$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

6. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка и через неё проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны S_1, S_2 и S_3 .

Доказать, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.