

9 класс

На выполнение заданий отводится 4 часа (240 минут).

Задания включают 6 задач.

Максимальная общая сумма баллов за решение всех задач – 100.

9.1. Докажите, что сумма попарных произведений трёх последовательных натуральных чисел не может равняться 3 000 000.

(10 баллов)

9.2. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петр Иванович стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое¹. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2.

Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2016-го дня.

(10 баллов)

9.3. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

(10 баллов)

9.4. Пусть x и y - положительные числа, для которых выполнено:

$$x + y = 1.$$

Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9.$$

(20 баллов)

9.5. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы периметр прямоугольника численно равнялся его площади?

(20 баллов)

9.6. В некоторой компании 100 акционеров и любые 66 из них владеют не менее 50 % акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

(30 баллов)

¹ Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним

гармоническим - число $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$