9 класс

9.1. Докажите, что сумма попарных произведений трёх последовательных натуральных чисел не может равняться 3 000 000.

Решение: Сумма попарных произведений трёх последовательных натуральных чисел $n-1$, n и $n+1$ имеет вид $n(n-1)+n(n+1)+(n-1)(n+1)=3n^2-1$, т.е. не делится на 3.

9.2. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петр Иванович стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое[2]. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2.

Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2016-го дня.

Решение:

Произведение чисел на доске не меняется.

Действительно, $\frac{a+b}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = ab$. Поэтому искомое произведение равно 2.

9.3. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

Решение. Из данного неравенства следует, что

$$2a(a-b) + b(a+b) = 2(a^2 - b^2) \qquad b(3b-a) = 0$$

Откуда b =0 или a=3b. Если b=0,то данное равенство выполняется при всех $a \neq 0$, а значит выражение $\frac{3a-b}{a+5b} = 3$.

Если $a = 3b$ и a и b отличны от нуля, то $\frac{3a-b}{a+5b} = 1$.

9.4. Пусть x и y - положительные числа, для которых выполнено:

$$x + y = 1.$$

Доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq 9.$$

Решение. Неравенство легко преобразуется к виду

$$x^2 + y^2 + 8x^2y^2 \leq 1.$$

Поскольку

---

[2] Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$, а средним гармоническим - число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

то

$$x^2 + y^2 + 8x^2y^2 = (x+y)^2 + 8x^2y^2 - 2xy = 1 + 2xy(4xy-1) \le 1.$$

А это и требовалось доказать.

9.5. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы периметр прямоугольника численно равнялся его площади?

Решение: Обозначив стороны прямоугольника через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, составляем уравнение

$$2x + 2y = xy, \text{ откуда } x = \frac{2y}{y-2}.$$

Так как x и y должны быть положительными, то положительным должно быть и число $y - 2$, т. е. y должно быть больше 2.

Заметим теперь, что

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Так как x должно быть целым числом, то выражение $\frac{4}{y-2}$ должно быть целым числом. Но при $y > 2$ это возможно лишь, если y равно 3, 4 или 6. Соответствующие значения x будут 6, 4, 3.

Итак, искомая фигура есть либо прямоугольник со сторонами 3 и 6, либо квадрат со стороной 4.

Ответ: прямоугольник со сторонами 3 и 6; квадрат со стороной 4.

9.6. В некоторой компании 100 акционеров и любые 66 из них владеют не менее 50 % акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

Решение. Пусть М – акционер, владеющий наибольшим процентом акций – х процентами акций. Разобьём остальных 99 акционеров на три группы А, В и

С по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a, b, c процентами акций. Тогда

$$2(100-x)=2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 50+50+50$$

Т.е. $x\leq 25$.

Если каждый из акционеров, кроме М, владеет $\frac{75}{99}=\frac{25}{33}\%$ акций, то любые 66 из них владеют ровно 50 %, а у М ровно 25% акций.

Ответ: 25 % акций.