8 класс

8.1. Из трех мальчиков, которых зовут Антон, Ваня и Саша, только один всегда говорит правду. Антон сказал: "Ваня не всегда говорит правду", Ваня сказал: "Я не всегда говорю правду", а Саша сказал: "Антон не всегда говорит правду". Кто же из них всегда говорит правду, если известно, что, по крайней мере, один из них солгал?

Решение

1) Легко видеть, что Ваня говорит правду (если предположить, что он лжет и высказывание "Я не всегда говорю правду" - не является правдой, то правдой будет: "Я всегда говорю правду", то есть, получится противоречие).

2) Так как смысл высказывания Антона такой же, то Антон тоже говорит правду.

3) По условию, один из мальчиков солгал, значит, это - Саша.

4) Саша сказал: "Антон не всегда говорит правду" - и при этом солгал, значит, Антон всегда говорит правду.

Ответ: Антон.

8.2. В полдень из пункта А в пункт В выехал «Москвич». Одновременно из В в А по той же дороге выехали «Жигули». Через час «Москвич» находился на полпути от А до «Жигулей». Когда он окажется на полпути от «Жигулей» до В? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое.)

Решение. Пусть скорости «Москвича» и «Жигулей» равны u и v соответственно. Из условия задачи следует, что если бы скорость «Москвича» равнялась 2u, то его встреча с «Жигулями» (идущими со скоростью v) произошла бы через час после начала движения. Отсюда следует, что если бы скорость «Жигулей» равнялась $\frac{v}{2}$, то их встреча с «Москвичом» (идущим со скоростью u) произошла бы через два часа после начала движения. Значит, именно в этот момент времени (2 ч дня) при данных (u и v) скоростях «Москвич» будет находиться на полпути от «Жигулей» до В.

Ответ: в 2 ч дня.

8.3. Пусть О – внутренняя точка квадрата ABCD со стороной AB=1, для которой выполняется равенство

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2.$$

Доказать, что О – центр квадрата.

Решение. Пусть x и y – расстояния от точки O до сторон AD и AB соответственно. С помощью теоремы Пифагора выразим через эти числа искомое выражение и преобразуем его к виду:

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2.$$

Как видно из этого выражения, оно рано 2 только если оба квадрата равны нулю, то есть, если $x = y = \frac{1}{2}$. А это и требовалось доказать.

8.4. Груз массой 13,5 т упакован в некоторое число «невесомых» ящиков. Масса каждого ящика с грузом не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.

Решение. Докажем, что ящиками не более 350 кг (если их общий вес более 1,2 т) можно набрать вес от 1,2 до 1,5 т. Расположим их по порядку,

начиная с самых тяжелых. Если первые четыре весят вместе более 1,2 т – их уже достаточно (вес будет не более 1,4 т); а если нет, то четвертый и последующие весят не более 0,3 т каждый, так что мы можем, нагружая их по порядку, обеспечить «недогруз» не более 0,3 т. Заметим, что оценка 1,2 т здесь точная: пример, когда все ящики весят поровну и чуть больше 300 кг, показывает, что ее нельзя заменить большей.

Теперь уже легко: нагружаем на 10 полуторатонок не менее чем по 1,2 т и – если что-то осталось – сваливаем остаток на 11-ю машину

8.5. На гранях кубика расставлены 6 различных чисел от 6 до 11. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех боковых гранях оказалась равна 36, во второй – 33. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 10?

Решение: Сумма чисел на всех гранях равна

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 51.$$

При первом броске сумма на верхней и нижней гранях равна 51 – 36 = 15, при втором — 51 – 33 = 18. Значит, на третьей паре противоположных граней сумма равна 51 – 15 – 18 = 18. Сумму 18 можно получить двумя способами: 11 + 7 или 10 + 8. Значит, на парах граней с суммой 18 напротив 11 находится 7, а напротив 10 — 8.

Ответ: 8

8.6. Остап Бендер поставил новые покрышки на автомобиль «Антилопа Гну». Известно, что передние покрышки автомобиля выходят из строя через 25000 км, а задние - через 15000 км (спереди и сзади покрышки одинаковые, но задние изнашиваются сильнее). Через сколько километров Остап Бендер должен поменять эти покрышки местами, чтобы «Антилопа Гну» прошла максимально возможное расстояние? Чему равно это расстояние?

Решение. Пусть Остап Бендер поменял покрышки местами через x километров. Тогда задние покрышки отработали [x/ 15000] своего ресурса, а передние [x/ 25000]. После замены они смогут проработать еще

$$25000\cdot\left(1-\frac{x}{15000}\right) \text{ и } 15000\cdot\left(1-\frac{x}{25000}\right)$$

километров соответственно. Таким образом, всего можно проехать не более

$$x+25000\left(1-\frac{x}{15000}\right)=25000-\frac{2}{3}x$$

и не более

$$x+15000\left(1-\frac{x}{25000}\right)=15000+\frac{2}{5}x$$

Максимальное расстояние можно проехать, если эти выражения равны (иначе либо первые, либо вторые покрышки выйдут из строя раньше, ведь когда первое выражение растет, то второе уменьшается и наоборот). Таким образом,

$$25000-\frac{2}{3}x=15000+\frac{2}{5}x$$

откуда $10000=\frac{16}{15}x$, или x = 9375.

Ответ: Сменить покрышки надо через 9375 км, тогда можно проехать 18750 км.