11 класс

1. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 1996 раз, а другое уменьшили в 96 раз, их сумма не изменилась. Чему может равняться их частное?

Решение. Пусть первое число равно x, а второе y. Тогда должно выполняться равенство $1996x+\frac{y}{96}=x+y$, из которого находим, что 2016x=y.

Следовательно, их частное равно 2016 или $\frac{1}{2016}$.

Ответ: 2016 или $\frac{1}{2016}$.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; за правильный ответ без решения – 1 балл.

2. По прогнозам аналитиков в следующем году численность экономически активного населения (занятых и безработных) некоторого города увеличится на 4%, а число безработных уменьшится на 9%. Сколько процентов от числа экономически активного населения в следующем году будут составлять безработные, если в этом году их было 5,6%?

Решение. Пусть x человек – численность населения города первоначально. Тогда 0,08x человек – число безработных первоначально. На данный момент численность населения – 1,04x человек, а число безработных – (0,91·0,056x) человек. (0,91·0,056x·100)÷1,04x=4,9% - процент безработных от общего числа жителей на данный момент.

Ответ: 4,9 %.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; продвижение в решении, не доведенное до полного решения – 3 балла; только правильный ответ – 1 балл.

3. Решите неравенство

$$\log_{3+\sin x-\cos x}\left(3-\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\right)\geq e^{\sqrt{x}}.$$

Решение. Учитывая, что cosx+sinx≠0 и 3+sinx-cosx>1,

$$\log_{3+\sin x-\cos x}\left(3-\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\right)=\log_{3+\sin x-\cos x}\left(3-\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\right)=$$
$$=\log_{3+\sin x-\cos x}\left(3-\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}\right)=\log_{3+\sin x-\cos x}(3+\sin x-\cos x)=1.$$

Получим неравенство $1\geq e^{\sqrt{x}}$. Следовательно, x=0.

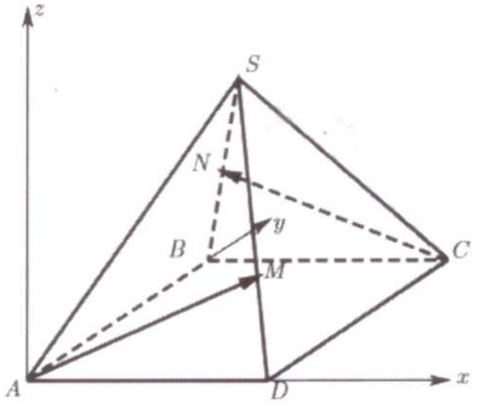
Ответ: 0.

Критерии: Полное решение – 7 баллов. Доказано, что левая часть неравенства равна 1 – 4 балла; только ответ – 1 балл.

4. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD высота равна стороне основания. На боковых ребрах SD и SB пирамиды отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и CN взаимно перпендикулярны. Докажите, что

$$2SA(SM+SN)=SA^2+SM\cdot SN.$$

Решение. Систему координат расположим так, что начало координат совпадает с вершиной A, а оси, как показано на рисунке.



Будем считать, что длина стороны основания пирамиды равна 2. Тогда $\overline{AB}\{0,2,0\}$, $\overline{AC}\{2,2,0\}$, $\overline{AD}\{2,0,0\}$, $\overline{AS}\{1,1,2\}$, $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}=\{-2,0,0\}$, $\overline{CS}=\overline{AS}-\overline{AC}=\{-1,-1,2\}$, $\overline{SB}=\overline{AB}-\overline{AS}=\{-1,1,-2\}$, $\overline{SD} = \overline{AB} - \overline{AS} = \{-1,1,-2\}$.

Выразим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ через $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SN}$:

$$\overrightarrow{SN}=\frac{SN}{SB}\cdot\overrightarrow{SB}=\frac{SN}{SA}\cdot\overrightarrow{SB},\quad \overrightarrow{SN}\left\{-\frac{SN}{SA},\frac{SN}{SA},-2\cdot\frac{SN}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{SM}=\frac{SM}{SD}\cdot\overrightarrow{SD}=\frac{SM}{SA}\cdot\overrightarrow{SD},\quad \overrightarrow{SM}\left\{\frac{SM}{SA},-\frac{SM}{SA},-2\cdot\frac{SM}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SM}=\left\{\frac{SA+SM}{SA},\frac{SA-SM}{SA},2\cdot\frac{SA-SM}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SN}=\left\{-\frac{SA+SN}{SA},-\frac{SA-SN}{SA},2\cdot\frac{SA-SN}{SA}\right\}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$:

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN})=-\frac{(SA+SM)(SA+SN)}{SA^2}-\frac{(SA-SM)(SA-SN)}{SA^2}+4\frac{(SA-SM)(SA-SN)}{SA^2}.$$

Для перпендикулярности прямых AM и CN необходимо, чтобы скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ равнялось нулю. Приравняв полученное выражение нулю и проделав необходимые преобразования получим требуемое равенство.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; ход рассуждений верный, но в результате ошибки при выкладках, требуемый результат не получен – 5 баллов; получены верные выражения для векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ – 3 балла; получены координаты векторов кроме $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ – 1 балл.

5. Решить уравнение при всех значениях параметра a

$$3x^2+2ax-a^2=\ln\frac{x-a}{2x}.$$

Решение. Если a=0, то уравнение примет вид $3x^2=\ln\frac{1}{2}$, которое не имеет решений. Если a≠0, то x не принадлежит отрезку [0,a] или [a,0] в зависимости от знака параметра a, т.к. иначе натуральный логарифм не существует. Преобразуем уравнение к виду:

$$4x^2+\ln|2x|=(x-a)^2+\ln|x-a|. \qquad (*)$$

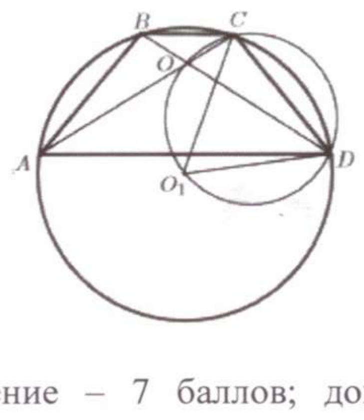
Пусть $f(t)=|t|^2+\ln|t|$. Тогда (*) примет вид $f(2x)=f(x-a)$. Заметим, что $f(t)$ четная и строго возрастающая при $t\geq 0$ функция (т.к. является суммой двух возрастающих при $t\geq 0$ функций). Значит $f(2x)=f(x-a)$ только, если $2x=x-a$ или $-2x=x-a$. Следовательно, $x=-a$ или $x=\frac{a}{3}$. Но точка $x=\frac{a}{3}$ лежит между a и 0, поэтому $x=-a$ единственное решение уравнения.

Ответ: При $a=0$ решений нет. При $a\neq 0$ единственное решение $x=-a$.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; получено выражение вида (*) – 2 балла. Если точка $x=\frac{a}{3}$ не исключена, то -2 балла. Если не указано, что при $a=0$ решений нет, то -1 балл.

6. Во вписанном четырехугольнике ABCD окружность описанная около треугольника COD (O – точка пересечения диагоналей) проходит через центр описанной окружности четырехугольника ABCD. Докажите, что четырехугольник ABCD – трапеция.

Решение. Пусть O_1 – центр описанной окружности четырехугольника ABCD. Из условия следует, что $\angle COD=\angle CO_1D=\smile CD$. С другой стороны, $\angle COD=(\smile AB+\smile CD)/2$. Из двух равенств получаем, $\smile AB=\smile CD$. Следовательно $BC||AD$, что и требовалось доказать.



Критерии: Полное решение – 7 баллов; доказательства нет, но есть продвижения в верном направлении – до 3 баллов.

7. Существуют ли 2016 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 16 простых чисел?

Решение. Введем функцию S(n), равную количеству простых чисел от n до n+2015. Заметим, что S(n) отличается от S(n+1) не более, чем на 1, S(2017!+2)=0, S(1)>16 (2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53, … - простые числа). Следовательно, существует число m такое, что S(m)=16. Т.е. среди чисел от m до m+2015 ровно 16 простых чисел.

Ответ: Да, существуют.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; если не показано, что среди первых 2015 чисел простых чисел более 16 – 6 баллов; за правильный ответ без решения – 0 баллов.

Заместитель председателя оргкомитета
олимпиады СКФУ «45 параллель»,
проректор по учебной работе,
доктор технических наук, профессор В.И. Шипулин