III открытая олимпиада
Заочный тур
Разбор задач

A. Раскраска

Количество областей на которые связный плоский граф разбивает лист бумаги может быть вычислено по формуле Эйлера $E - V + 2$, где E – количество ребер графа, а V – количество вершин графа.

Эту формулу легко доказать индукцией по числу ребер графа. Если количество ребер $E = 0$, то так как граф связный, количество вершин $V = 1$, откуда получаем, что количество областей равно $E - V + 2 = 1$, что очевидно верно. Предположим, что формула верна для $E = k$, докажем, что она верна для $E = k + 1$. Если $V > k + 2$, то граф не будет связным, следовательно $V \leq k+2$. Если $V = k+2$, то граф является деревом, а значит количество областей равно 1, что совпадает с результатом, посчитанным по формуле $E - V + 2 = (k + 1) - (k + 2) + 2 = 1$. Если же $V < k + 2$, то граф уже не будет деревом и в нем найдется хотя бы один цикл. Удалив ребро из этого цикла, получим граф, у которого количество ребер равно $E' = k$. Применим к этому графу предположение индукции. Получим, что он разбивает лист на $E' - V' + 2$ областей. Количество областей, на которые разбивает лист исходный граф, на единицу больше и равно:

$$(E' - V' + 2) + 1 = (k - V + 2) + 1 = (k + 1) - V + 2 = E - V + 2,$$

так как $V = V'$, $E = E' + 1 = k + 1$. Формула доказана.

B. Змейка

При заранее известном максимально возможном количество еды оптимальной стратегией ее расстановки является расстановка в самом конце движения змейки. Тогда, чтобы найти максимальное количество еды, нужно воспроизвести движение змейки с конца пути до начала, отмечая в битовой матрице размером 2000×2000 клетки, в которых побывала змейка. Попадание в использованную клетку означает первый цикл на пути змейки, а, значит, максимальной ее длиной может быть длина цикла минус один.

C. Великий Нарнийский Замóк

Чтобы задача имела решение необходимо, чтобы НОД всех чисел был равен 1, так как оперции сложения и умножения не могут уменьшить НОД, а в конце он должен равняться единице.

Если все числа больше нуля, то операции сложения и умножения не уменьшают наши числа. Поэтому решение возможно только для случая, когда все числа равны единице.

Если все числа неотрицательные, то оперции сложения и умножения не уменьшают наши числа, за исключением умножения на 0. Таким образом, можно занулить все числа большие единицы, но чтобы задача имела решение необходимо, чтобы среди наших чисел была хотя бы одна единица. Таким образом, для этого случая, задача имеет решение только в том случае, если среди чисел хотя бы по одному разу встречаются ноль и единица.

Если среди чисел есть отрицательные, и НОД всех чисел равен единице, то задача имеет решение. Сначала заметим, что так как сумма всех чисел неотрицательна, то найдется хотя бы одно положительное число. Найдется при этом и пара чисел разного знака, стоящих рядом. Операциями сложения из этих чисел можно получить их НОД или минус НОД. Делая так по порядку со всеми парами чисел по кругу, получим НОД всех чисел, который равен 1. Прибавляя несколько раз эту единицу к одному из отрицательных чисел, получим 0. Имея 0 и 1 задачу можно решить.

Отдельно рассматривается случай, когда количество чисел равно одному.

D. Построение

Сначала заметим, что максимальное количество перестановок, которое может понадобиться для того чтобы построить n школьников по росту равно $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, если все школьники стоят в обратном порядке. Поэтому, если $k > \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, то задача не имеет решения.

Если $k \leq \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, найдем такое число t, что $\frac{t\cdot(t-1)}{2} \leq k < \frac{(t+1)\cdot t}{2}$. Заметим, что $t \leq n$, а значит мы можем выбрать первых t школьников и построить их в обратном порядке, а остальных построить в правильном порядке. Количество недостающих перестановок равно $k - \frac{t\cdot(t-1)}{2} < \frac{(t+1)\cdot t}{2} - \frac{t\cdot(t-1)}{2} = t \leq n$. А значит можно взять самого высокого школьника и сдвинуть его на $k - \frac{t\cdot(t-1)}{2}$ позиций влево. Таким образом получим требуемую расстановку школьников.

E. Кофе и бутерброд

Пусть $x_i = x_i + \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$, тогда должно выполняться:

$$(x_1 + \ldots + (x_i + \varepsilon) + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + \ldots + (x_i + \varepsilon)^2 + \ldots + x_n^2) = 0,$$
$$(x_1 + \ldots + x_n + \varepsilon)^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2\varepsilon \cdot x_i + 1) = 0.$$

Обозначим $S = x_1 + \ldots + x_n$, $Q = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, тогда можно записать:

$$(S + \varepsilon)^2 - (Q + 2\varepsilon \cdot x_i + 1) = 0,$$
$$S^2 + 2\varepsilon \cdot S + 1 - Q - 2\varepsilon \cdot x_i - 1 = 0,$$
$$2\varepsilon \cdot x_i = S^2 + 2\varepsilon \cdot S - Q,$$
$$x_i = S + \frac{\varepsilon}{2}(S^2 - Q).$$

Таким образом, нужно за первый проход массива вычислить величины S и Q. А во время второго прохода проверить выполнено ли соотношение $x_i = S + \frac{\varepsilon}{2}(S^2 - Q)$ хотя бы для одного из значений $1 \le i \le n$ и $\varepsilon = \pm 1$.

F. Сайты

Если $K < N$, то ответ, очевидно, равен нулю. Если $N \le K < M$, то ответом будет $(K - N + 1)$. Если $M \le K$, то ответом будет $(M - N) + 2 \cdot (K - M + 1)$.

G. Невнимательный гроссмейстер

Для начала следует проставить нули на главную диагональ турнирной таблицы. Затем можно восстановить часть информации, используя тот факт, что симметричные относительно главной диагонали числа отражают результат одной и той же партии. Поэтому если одно из этих чисел сохранилось, то второе однозначно восстанавливается.

После этого находим сумму чисел в каждой строке турнирной таблицы (знаки вопроса при суммировании пропускаем). Полученные числа дают нижнюю границу для числа очков набранного каждым игроком. Тот игрок, у которого эта сумма максимальна, является потенциально возможным победителем турнира. Чтобы можно было однозначно утверждать то, что он победитель турнира, необходимо чтобы, даже в том случае, если он проиграл все партии, результат которых неизвестен, и при любых исходах других партий с неизвестным результатом, он все равно имел максимальное количество очков. Чтобы проверить это заполним все неизвестные результаты претендента нулями, а всем остальным игрокам поставим вместо "?" победу, то есть число 3. Затем найдем суммы во всех строках. Если у претендента на победу сумма будет по прежнему максимальной, то он однозначно является победителем турнира. В противном случае выводим "impossible".

H. Сложение-вычитание

Введем массив из $k - 1$ элементов, каждый элемент которого может принимать одно из трех значений множества $\{\text{пусто}, +, -\}$. Пусть i-ый элемент этого массива означает, что именно (пусто, $+$ или $-$) вставлено после i-ой цифры исходной строки.

Проведем полный перебор возможных 3^{k-1} состояний этого массива. Для каждого состояния посчитаем, получается ли заданное число, и из тех состояний, для которых это условие выполняется, выберем то, в котором меньше элементов со значениями, отличными от пусто.

Для изучения каждого из возможных состояний достаточно $O(k)$ действий. Не более такого же количества действий требуется для перехода к лексикографически следующему состоянию. Таким образом, трудоемкость описанного алгоритма равна $O(k \cdot 3^k)$.

I. Красочное панно

При $n = 1$ можно разрушить все m плиток, стреляя, например, по любой горизонтальной линии, лежащей внутри панно.

При $n = 2$ можно разрушить все $2m$ плиток, стреляя вдоль границы между рядами плиток.

Если угол между траекторией лазера и горизонталью не превышает по модулю 45 градусов, в каждом вертикальном ряду можно разрушить не более 2 плиток, так что количество разрушенных плиток не превышает $2m$. Но такого результата можно достигнуть, стреляя вдоль границы между соседними горизонтальными рядами. Если угол по модулю больше 45 градусов, из $n \le m$ следует, что результат не может быть лучше.

Если траектория выстрела наклонена к горизонтали ровно на 45 градусов и проходит через углы плиток, то она пересекает или касается трех плиток в каждом вертикальном ряду, кроме первого и последнего, в которых она заметает 2 или 3 плитки (2, если траектория проходит через угол панно). Таким образом, получаем:

Если $n \ge 3$, $m = n$, то ответ будет $3n{-}2$.

Если $n \ge 3$, $m = n + 1$, то ответ будет $3n{-}1$.

Если $n \ge 3$, $m \ge n + 2$, то ответ будет $\max(2m, 3n)$.

J. Стресс-экспресс

Заметим, что непосредственное значение точки назначения не важно – важно только направление от исходной точки. Вычислим требуемую в задаче вероятность P того, что поезд будет ехать в нужную сторону, при условии, что ехать нужно вправо. Тогда, если ехать нужно влево, вычтем полученное значение из единицы.

Доля времени (вероятность) нахождения поезда в левой половине пути (там, где он двигается со скоростью a в одну сторону и d в другую) вычисляется, как:

$$P_{ad} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{d}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}.$$

Следовательно, вероятность нахождения поезда в правой половине пути равна $P_{bc} = 1 - P_{ad}$.

Нормализуем точку x так, чтобы она принадлежала интервалу $(0; 2)$. Если $x \le 1$, т.е. она находится в левой половине пути, то итоговая вероятность $P = x \cdot P_{ad}$. Иначе, если $x > 1$, то $P = 1 - (2 - x) \cdot P_{bc}$.