III открытая олимпиада
Очный тур
Разбор задач

A. Волшебный лес

Построим гистограмму $gist$, такую что $gist[i]$ равно количеству гномов, у которых есть ровно i золотых монет. Затем, предподсчитываем все способы представления числа k в виде неупорядоченной суммы четырех неотрицательных чисел. Для каждого способа находим количество возможных четверок гномов, с помощью гистограммы $gist$. Суммируем все полученные результаты.

B. Игра с волчком

Для решения задачи удобно использовать дерево Фенвика. С его помощью можно находить сумму очков игроков, которые стоят последовательно друг за другом, а также изменять текущее количество очков одного из игроков за время $O(\log N)$. В задаче потребуется выполнить $O(K)$ подобных операций, следовательно на выполнение всех этих операций потребуется $K \cdot \log N$ времени. Само построение дерева Фенвика требует $O(N \cdot \log N)$ времени. Следовательно задача будет решена за время $O((N + K) \cdot \log N)$.

C. Забор

Задача решается бинарным поиском по высоте забора. Зададимся высотой забора h, и просмотрим все имеющиеся пруты. Все пруты, которые длиннее h, нам придется разрезать, причем число разрезов для каждого прута однозначно определено. Для прута длины $a = b \cdot h + c, 0 \leq c < h$, нужно сделать b разрезаний, если $c > 0$, и $(b-1)$ разрезание, если $c = 0$, причем в результате получится b прутьев длины h. Просуммировав по всем прутьям, получим общее число разрезов и общее число прутьев длины h. Если прутьев длины h не менее, чем k штук, то мы можем построить забор высоты h.

Заметим, во-первых, что если можно соорудить забор высоты h, то (при $h > 1$) можно соорудить и забор высоты $h-1$. А если нельзя построить забор высоты h, то нельзя построить и забор высоты $h + 1$. Таким образом, мы можем применить бинарный поиск и найти за $O(n \cdot \log n)$ наибольшую высоту, при которой можно соорудить забор.

Теперь заметим, что с ростом высоты число разрезов нестрого убывает. Поэтому при наибольшей допустимой высоте мы получим наименьшее число разрезов.

D. Карты и булавки

В условии сказано, что вторая карта является уменьшенной копией первой карты, с тем же соотношением сторон. Это означает, что существует аффинное преобразование плоскости A, переводящее точки первой карты в точки второй карты. Это преобразование можно выписать, так как координаты углов обеих карт даны. Искомая точка при применении преобразования A должна остаться на месте (такую точку называют “неподвижной точкой преобразования”).

В условии также сказано, что коэффициент сжатия данного преобразования меньше единицы. Это означает, что расстояния между любыми двумя точками при применении A уменьшаются. Такие преобразования также называют “сжимающими отображениями”. У сжимающих отображений всегда существует единственная неподвижная точка.

Для того, чтобы найти неподвижную точку, можно просто решить уравнение $A(p) = p$. Так как A – аффинное преобразование, это уравнение представляет собой обычную систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными (x и y). После этого останется только проверить, лежит ли точка (x, y) в обоих прямоугольниках.

Можно также действовать несколько другим способом. Возьмем произвольную начальную точку (x_0, y_0). Теперь будем последовательно применять преобразование A к этой точке, потом к полученной точке и т.д. Так как расстояния между любыми двумя точками сокращаются (как минимум в 0.9 раз), то через некоторое количество итераций мы достаточно приблизимся к неподвижной точке.

E. Гусеница

Количество способов составить гусеницу из n сегментов равно $n!$. Если $n \geq 85$, то последние 20 цифр числа $n!$ – это нули. Для случаев $n < 85$ задачу можно решить различными способами, например, умножением в столбик.

F. Офис для программистов

Обозначим через $F_k(n)$ максимальное количество частей, на которое k-мерный шар разбивается n $(k-1)$-мерными плоскостями. Очевидно, 1-мерный шар (отрезок) разбивается n 0-мерными плоскостями (точками) на $n+1$ частей, если точки различны и не совпадают с концами отрезка. Таким образом $F_1(n) = n+1$. Рассмотрим теперь случай разбиения 2-мерного шара (круга) 1-мерными плоскостями (прямыми). Пусть мы уже разбили круг n прямыми на максимальное число $F_2(n)$ частей. Проведем $(n+1)$-ую прямую так, чтобы она пересекала все предыдущие прямые внутри круга, и чтобы новые n точек пересечения отличались от уже имеющихся. Упорядочим новые точки пересечения вдоль этой прямой. Тогда отрезки прямой между соседними точками пересечения и между крайними в этом упорядочении точками и границей круга разобьют каждую из $F_1(n)$ частей круга на 2 части. Отсюда $F_2(n+1) = F_2(n) + F_1(n)$. Аналогично, пусть мы уже разбили 3-мерный шар n 2-мерными плоскостями на максимальное число $F_3(n)$ частей. Проведем $(n+1)$-ую плоскость так, чтобы она пересекала все предшествующие n плоскостей и новые n линий пересечения не совпадали с линиями пересечения предшествующих плоскостей. При этом появится n линий пересечения новой плоскости с n предыдущими, которые разобьют эту плоскость на $F_2(n)$ частей. Но каждой из этих частей плоскости соответствует часть шара, которую новая плоскость пересекает, деля ее на две части. Таким образом, $F_3(n+1) = F_3(n) + F_2(n)$.

Теперь заметим, что из $F_k(n+1) = F_k(n) + F_{k-1}(n)$ при $k = 2, 3$ и того, что $F_1(n)$ – многочлен первой степени от n, следует, что $F_2(n)$ и $F_3(n)$ – многочлены второй и третьей степени от n, соответственно. Будем искать $F_3(n)$ в виде $a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$. Составим систему из 4 линейных уравнений с 4 неизвестными $a,\ b,\ c,\ d$, используя значения $F_3(n)$ при $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Решая эту систему, получим $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$, $c = \frac{5}{6}$, $d = 1$. Или $F_3(n) = \frac{1}{6} \cdot (n^2 - n + 6)(n+1)$. Так как $n \leq 10^6$, $F_3(n) < 2 \cdot 10^{18}$, то все вычисления достаточно вести с числами формата long long. Следует отметить, что все рассуждения справедливы и для $k > 3$.

G. Космические пузыри

Каждый пузырь может быть в одном из двух состояний – застыл или не застыл. Пометим все пузыри не застывшими. Для каждой пары пузырей вычислим время их столкновения без учета влияния других пузырей. Все пары поместим в какой-нибудь контейнер, который позволяет добавлять пару за $O(\log n)$ и хранит пары в порядке убывания времени их столкновения, например в кучу (std::priority_queue). Пока контейнер не опустеет будем вынимать из него минимальную пару. Если оба пузыря из пары не застывшие, то изменим их состояние на застывшее и запомним время, когда они застыли. Если оба пузыря застывшие, то переходим к следующему шагу цикла. Если один из пузырей не застывший, а другой застывший, то пересчитываем время их столкновения и добавляем эту пару обратно в контейнер.

Это алгоритм с ленивым обновлением, его сложность $O(n^2 \cdot \log n)$.

H. Оси симметрии

Ось симметрии многоугольника может проходить только через его вершины и через середины его сторон. Выпишем координаты $2N$ точек – вершин многоугольника и середин его сторон в порядке обхода и занумеруем их от 0 до $2N-1$. Рассмотрим всех претендентов на ось симметрии – прямые, проходящие через точки i и $i+N$, $0 \leq i \leq N-1$. Для того, чтобы прямая, проходящая через точки i и $i+N$, была осью симметрии многоугольника, необходимо и достаточно, чтобы каждая пара точек $(i+j)$ и $(i-j)(\mathrm{mod} 2N)$, для всех $1 \leq j \leq N-1$, была расположена симметрично относительно этой прямой.

Проверить симметричность расположения точек C и D относительно прямой AB проще всего, установив, что прямые AB и CD ортогональны и точка их пересечения делит отрезок CD пополам. Чтобы не выходить за пределы вычисления с целыми числами, достаточно все координаты точек увеличить в 4 раза. Трудоемкость такого решения равна $O(N^2)$.

I. Зеркало в коридоре

Отразим Петю относительно плоскости зеркала. Проведём прямую через отражённого Петю и незнакомца и пересечём её с плоскостью зеркала. Посмотрим, попадает ли точка пересечения в зеркало. Отдельно рассмотрим случай, когда Петя и незнакомец лежат по разные стороны от зеркала – тогда Петя его точно не видит.

J. Конструктор "ЛЕВО"

Данная задача может быть решена перебором оффлайн для всех значений $6 \leq n \leq 10^6$. По результатам вычислений оффлайн, можно определить, что для всех значений $6 \leq n \leq 10^6$ есть такой оптимальный параллелепипед, у которого максимальная сторона не превышает 413. Это дает нам возможность делать перебор по длинам сторон параллелепипеда в пределах от 1 до 413, а такой перебор уже можно использовать в решении.