ВАРИАНТ 4

Задача 1

Найдите сумму натуральных чисел $n \in [60;80]$, которые нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение:

Натуральные числа, кратные 4, можно представить в виде разности квадратов: $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Нечетные числа тоже можно представить в виде разности квадратов: $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Так как $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$, то разность квадратов либо нечетна, либо кратна 4. Отсюда следует, что числа, не представляемые в виде разности квадратов, имеют вид $4n+2$. На промежутке $[60;80]$ такими числами будут числа 62,66,70,74,78. Их сумма равна 350.

Ответ: 350.

Задача 2

Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{4+x+\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} + x$ на промежутке $[0;21]$.

Решение:

$y = \dfrac{\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} + x = \sqrt{x+4} + x$. Наименьшее значение достигается при $x = 0$ и равно 2.

Ответ: 2.

Задача 3

Решите уравнение $\log_{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x}+2) = \log_{x+1}(x+3)$.

Решение:

Если $2\sqrt{x} < 1$, то правая и левая части имеют разные знаки. При $2\sqrt{x} > 1$ перепишем уравнение в виде $\dfrac{\ln(2\sqrt{x}+2)}{\ln 2\sqrt{x}} = \dfrac{\ln((x+1)+2)}{\ln(x+1)}$. Функция $y = \dfrac{\ln(t+2)}{\ln t}$ убывающая при $t > 1$, так как ее производная $y' = \dfrac{(t+2)^{-1}\ln t - t^{-1}\ln(t+2)}{\ln^2 t}$ отрицательна. Отсюда следует, что $2\sqrt{x} = x+1$ и $x = 1$.

Ответ: 1.

Задача 4

Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{2-y} \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{2-y} = 2\sqrt{x+1}. \end{cases}$

Решение:

Если сложить уравнения системы, то получим уравнение $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2-y}-\sqrt{2+y}$. После возведения его в квадрат получаем уравнение $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-y^2}$, из которого следует, что $y^2=(x-1)^2$. Отсюда получаем $x=1, y=0$.

Ответ: (1,0).

Задача 5

Сколько корней на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ имеет уравнение $\dfrac{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}=\dfrac{\operatorname{tg}x}{3}$?

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения :

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}=\frac{1+\cos x+\sin x}{1-\cos x+\sin x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$ Правая часть

преобразуется следующим образом: $\dfrac{\operatorname{tg}x}{3}=\dfrac{\sin x}{3\cos x}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{3(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$. Наше уравнение принимает

вид $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{3(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$. Так как $x/2\in(-\pi/4;\pi/4)$, то $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$ и уравнение приходит к

виду $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{8}$. На интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ это уравнение имеет два решения

$x=\pm 2\arcsin\sqrt{3/8}$.

Ответ: 2.

Задача 6

Пассажир прошел по движущемуся эскалатору, вступив на 20 ступеней. В следующий раз он шел с той же скоростью навстречу движению эскалатора и вступил на 80 ступеней. На сколько ступеней вступит пассажир, если ему придется идти по неподвижному эскалатору?

Решение:

Пусть лента эскалатора имеет протяженность в n ступеней. При движении по неподвижному эскалатору пассажир вступает на n ступеней и продвигается вперед на n ступеней. Если пассажир идет в направлении движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 20 ступеней, а эскалатор перемещается на $n-20$ ступеней.

Если пассажир идет против движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 80 ступеней, а эскалатор перемещается на $80-n$ ступеней. Поскольку скорость движения пассажира сохранилась, равны отношения перемещений пассажира и эскалатора.

$$\frac{n-20}{20}=\frac{80-n}{80},\ 4(n-20)=80-n,\ 5n=160,\ n=32.$$

Ответ: 32.

Задача 7

Три автосалона продавали автомобили стандартной и улучшенной комплектаций. Автомобили улучшенной комплектации имели и повышенную цену. Во всех салонах цены были одинаковыми. Первый салон продал 7 автомобилей, второй — 13, третий — 17, причем в каждом пункте продаж был продан хотя бы один стандартный автомобиль. Выручка салонов оказалась одинаковой. Найдите наибольшее возможное число проданных автомобилей стандартной комплектации.

Решение:

Обозначим через $k,\ m,\ n$ число улучшенных автомобилей, проданных первым, вторым и третьим автосалонами соответственно. По стандартным ценам салоны продали $7-k,\ 13-m,\ 17-n$ автомобилей. Ясно, что $k>m>n$. Обозначим через x и y $(x<y)$ цены стандартной и улучшенной комплектаций. Выручки салонов равны соответственно

$$(7-k)x+ky,\ (13-m)x+my,\ (17-n)x+ny.$$

По условию выручки салонов одинаковы. Получаем уравнения

$$(7-k)x+ky=(13-m)x+my=(17-n)x+ny.$$

Из левого равенство получается, что

$$(k-m)y=(6+k-m)x,$$

а из правого —

$$(m-n)y=(4+m-n)x.$$

Разделим первое из полученных равенств на второе.

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{6+(k-m)}{4+(m-n)}.$$

Далее,

$$4(k-m)+(k-m)(m-n)=6(m-n)+(k-m)(m-n),$$

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $k-m=3i,\ m-n=2i$, где i — натуральное число. Заметим, что первый салон продал $k=n+5i$ дорогих автомобилей. По условию задачи $k\le 6$. Поэтому $i=1$; $k-m=3,\ m-n=2$. Возможны два варианта:

$$1)\ n=0,\ m=2,\ k=5;\ 2)\ n=1,\ m=3,\ k=6.$$

Наибольшее число стандартных автомобилей получается в первом варианте. Это число равно $17+11+2=30$.

Ответ: 30.

Задача 8

В результате смешения 125 г 60%-го и некоторого количества 20%-го растворов соли получился 30%-й раствора. Сколько получилось 30%-го раствора?

Решение:

Обозначим через x количество 20% -го раствора. В результате смешения получилось $(125+x)$ г раствора. Этот раствор содержит $(0.6\cdot 125+0.2x)$ г соли, раствор имеет концентрацию $\dfrac{0.6\cdot 125+0.2x}{125+x}$. По условию $\dfrac{0.6\cdot 125+0.2x}{125+x}=0.3$. Решим полученное уравнение.

$$75+0.2x=37.5+0.3x,\ 37.5=0.1x,\ x=375.$$

Всего получилось $125+375=500$ г раствора.

Ответ: 500.

Задача 9

Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, проведённых из вершин B и C соответственно. Известно, что $AB=12,\quad AC=11,\quad \sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. Найдите длину отрезка B_1C_1.

Решение:

Обозначим угол $\angle BAC$ через α. Возможны два случая: 1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и 2) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

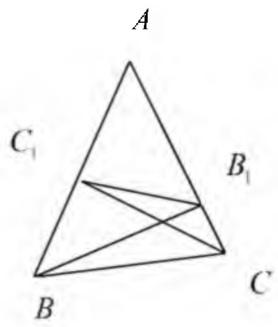
I. Пусть $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac{39}{8^2}}=\dfrac{\sqrt{64-39}}{8}=\dfrac{\sqrt{25}}{8}=\dfrac{5}{8}$.

Из треугольника ABB_1 получаем: $\dfrac{AB_1}{AB}=\cos\alpha=\dfrac{5}{8}$. Найдём длину BC.

По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}=\sqrt{144+121-2\cdot 12\cdot 11\cdot\frac{5}{8}}=\sqrt{265-165}=10.$$

Отрезок BC является диаметром окружности, описанной как вокруг треугольника BB_1C, так и вокруг треугольника BC_1C. Следовательно, эта окружность описана вокруг четырёхугольника BC_1B_1C.



Значит, $\angle BC_1B_1+\angle ACB=\pi$. С другой стороны, $\angle BC_1B_1+\angle AC_1B_1=\pi$. Следовательно, $\angle ACB=\angle AC_1B_1$, откуда следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам, т.к. угол $\angle BAC$ - общий. Значит, $\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{AB_1}{AB}=\cos\alpha$.

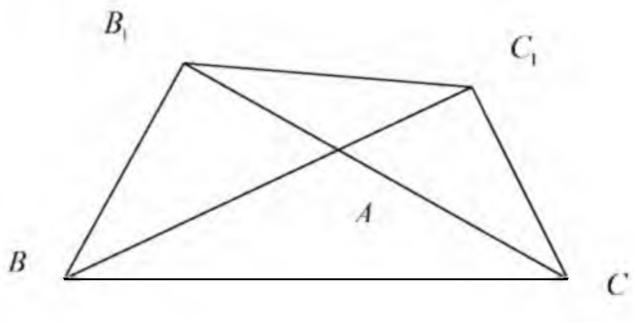
Таким образом, $B_1C_1=BC\cdot\cos\alpha=10\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{25}{4}$.

II. Пусть теперь $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Тогда

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{39}{8^2}}=-\frac{\sqrt{64-39}}{8}=-\frac{\sqrt{25}}{8}=-\frac{5}{8}.$$

Из треугольника ABB_1 получаем: $\dfrac{AB_1}{AB}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{5}{8}$. По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha}=\sqrt{144+121+2\cdot 12\cdot 11\cdot\frac{5}{8}}=\sqrt{265+165}=\sqrt{430}.$$



Как уже было доказано в пункте I, вокруг четырёхугольника BB_1C_1C можно описать окружность. Следовательно, $\angle BC_1B_1=\angle B_1CB$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Кроме того, $\angle B_1AC_1=\angle BAC$ как вертикальные углы, откуда и следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам. Значит, $\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{AB_1}{AB}=\cos(\pi-\alpha)=\dfrac{5}{8}$ и $B_1C_1=BC\cdot\cos(\pi-\alpha)=BC\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5\cdot\sqrt{430}}{8}$.

Ответ: $B_1C_1=\dfrac{25}{4}$ или $B_1C_1=\dfrac{5\cdot\sqrt{430}}{8}$.

Задача 10

При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2-4}{|2x-2|-|x-4|}=\dfrac{ax^2}{3}$ имеет корень, причем только один?

ОДЗ: Знаменатель обращается в 0, если $2x-2=\pm(x-4)$, т.е. при $x=\pm2$. Для уравнения допустимы все x, кроме $x=\pm2$.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на $|2x-2|+|x-4|>0$.

$$\frac{(x^2-4)(|2x-2|+|x-4|)}{(2x-2)^2-(x-4)^2}=\frac{ax^2}{3},$$

$$\frac{(x^2-4)(|2x-2|+|x-4|)}{3(x^2-4)}=\frac{ax^2}{3},$$

$$|2x-2|+|x-4|=ax^2. \qquad (*)$$

Если $a\le0$, то левая часть >0, а правая — ≤0; уравнение (*) не имеет решений.

Если $a>0$, уравнение (*) имеет по крайней мере 2 решения.

Исходное уравнение может иметь меньшее число решений, только если хотя бы одно из чисел ±2 — решение (*).

2 — решение (*), если $4=4a,\ a=1$; (-2) — решение (*), если $12=4a,\ a=3$.

При $a=1$ уравнение (*) принимает вид $|2x-2|+|x-4|=x^2$ и имеет корни $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2},\ x_2=2$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$.

При $a=3$ уравнение (*) принимает вид $|2x-2|+|x-4|=3x^2$ и имеет корни $x_1=-2,\ x_2=1$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Ответ: уравнение имеет один корень, при $a=1$ и при $a=3$.