ВАРИАНТ 3

Задача 1

Найдите сумму натуральных чисел $n \in [50; 70]$, которые нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Решение:

Натуральные числа, кратные 4, можно представить в виде разности квадратов: $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$. Нечетные числа тоже можно представить в виде разности квадратов: $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Так как $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$, то разность квадратов либо нечетна, либо кратна 4. Отсюда следует, что числа, не представляемые в виде разности квадратов, имеют вид $4n+2$. На промежутке $[50; 70]$ такими числами будут числа 50,54,58,62,66,70. Их сумма равна 360.

Ответ: 360.

Задача 2

Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{3+x+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} + x$ на промежутке $[0;13]$.

Решение:

$y = \dfrac{\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} + x = \sqrt{x+3} + x$. Наибольшее значение достигается при $x = 13$ и равно 17.

Ответ: 17.

Задача 3

Решите уравнение $\log_{6\sqrt{x}}(6\sqrt{x}+1) = \log_{x+9}(x+10)$.

Решение:

Если $6\sqrt{x} < 1$, то правая и левая части имеют разные знаки. При $6\sqrt{x} > 1$ перепишем уравнение в виде $\dfrac{\ln(6\sqrt{x}+1)}{\ln 6\sqrt{x}} = \dfrac{\ln((x+9)+1)}{\ln(x+9)}$. Функция $y = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$ убывающая при $t > 1$, так как ее производная $y' = \dfrac{(t+1)^{-1}\ln t - t^{-1}\ln(t+1)}{\ln^2 t}$ отрицательна. Отсюда следует, что $6\sqrt{x} = x+9$ и $x = 9$.

Ответ: 9.

Задача 4

Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{4-x}=2\sqrt{y} \\ \sqrt{y}+\sqrt{6-y}=2\sqrt{x+2}. \end{cases}$

Решение:

Если сложить уравнения системы, то получим уравнение $\sqrt{4-x}-\sqrt{x+2}=\sqrt{y}-\sqrt{6-y}$. После возведения его в квадрат получаем уравнение $\sqrt{8+2x-x^2}=\sqrt{6y-y^2}$, из которого следует, что $(x-1)^2=(y-3)^2$. Отсюда получаем $x=1, y=3$.

Ответ: (1,3).

Задача 5

Сколько корней на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ имеет уравнение $\dfrac{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}=\dfrac{\operatorname{tg} x}{5}$?

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения :

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}{1+\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)}=\frac{1+\cos x+\sin x}{1-\cos x+\sin x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

. Правая часть преобразуется следующим образом: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{5}=\dfrac{\sin x}{5\cos x}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$. Наше уравнение принимает вид $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{5(1-2\sin^2\frac{x}{2})}$. Так как $x/2\in(-\pi/4;\pi/4)$, то $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ и уравнение приходит к виду $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{5}{12}$. На интервале $(-\pi/2;\pi/2)$ это уравнение имеет два решения $x=\pm 2\arcsin\sqrt{5/12}$.

Ответ: 2.

Задача 6

Пассажир прошел по движущемуся эскалатору, вступив на 40 ступеней. В следующий раз он шел с той же скоростью навстречу движению эскалатора и вступил на 120 ступеней. На сколько ступеней вступит пассажир, если ему придется идти по неподвижному эскалатору?

Решение:

Пусть лента эскалатора имеет протяженность в n ступеней. При движении по неподвижному эскалатору пассажир вступает на n ступеней и продвигается вперед на n ступеней. Если пассажир идет в направлении движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 40 ступеней, а эскалатор перемещается на $n-40$ ступеней.

Если пассажир идет против движения эскалатора, то он продвигается относительно эскалатора на 120 ступеней, а эскалатор перемещается на $120-n$ ступеней. Поскольку скорость движения пассажира сохранилась, равны отношения перемещений пассажира и эскалатора.

$$\frac{n-40}{40}=\frac{120-n}{120},\ 3(n-40)=120-n,\ 4n=240,\ n=60.$$

Ответ: 60.

Задача 7

Три автосалона продавали автомобили стандартной и улучшенной комплектаций. Автомобили улучшенной комплектации имели и повышенную цену. Во всех салонах цены были одинаковыми. Первый салон продал 7 автомобилей, второй — 11, третий — 17, причем в каждом пункте продаж был продан хотя бы один стандартный автомобиль. Выручка салонов оказалась одинаковой. Найдите наименьшее возможное число проданных автомобилей улучшенной комплектации.

Решение:

Обозначим через $k,\ m,\ n$ число улучшенных автомобилей, проданных первым, вторым и третьим автосалонами соответственно. По стандартным ценам салоны продали $7-k,\ 11-m,\ 17-n$ автомобилей. Ясно, что $k>m>n$. Обозначим через x и y $(x<y)$ цены стандартной и улучшенной комплектаций. Выручки салонов равны соответственно

$$(7-k)x+ky,\ (11-m)x+my,\ (17-n)x+ny.$$

По условию выручки салонов одинаковы. Получаем уравнения

$$(7-k)x+ky=(11-m)x+my=(17-n)x+ny.$$

Из левого равенство получается, что

$$(k-m)y=(4+k-m)x,$$

а из правого —

$$(m-n)y=(6+m-n)x.$$

Разделим первое из полученных равенств на второе.

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{4+(k-m)}{6+(m-n)}.$$

Далее,

$$6(k-m)+(k-m)(m-n)=4(m-n)+(k-m)(m-n),$$

$$\frac{k-m}{m-n}=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $k-m=2i,\ m-n=3i$, где i — натуральное число. Заметим, что первый салон продал $k=n+5i$ дорогих автомобилей. По условию задачи $k\le 6$. Поэтому $i=1$; $k-m=2,\ m-n=3$. Возможны два варианта:

$$1)\ n=0,\ m=3,\ k=5;\ 2)\ n=1,\ m=4,\ k=6.$$

Наименьшее число улучшенных автомобилей получается в первом варианте. Это число равно $0+3+5=8$.

Ответ: 8.

Задача 8

В результате смешения 160 г 35%-го и некоторого количества 10%-го растворов соли получился 20%-й раствора. Сколько получилось 20%-го раствора?

Решение:

Обозначим через x количество 10% -го раствора. В результате смешения получилось $(160+x)$ г раствора. Этот раствор содержит $(0.35\cdot 160+0.1x)$ г соли, раствор имеет концентрацию $\frac{0.35\cdot 160+0.1x}{160+x}$. По условию $\frac{0.35\cdot 160+0.1x}{160+x}=0.2$. Решим полученное уравнение.

$$0.35\cdot 160+0.1x=0.2\cdot 160+0.2x,\ 0.15\cdot 160=0.1x,\ x=240.$$

Всего получилось $160+240=400$ г раствора.

Ответ: 400.

Задача 9

Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC, проведённых из вершин B и C соответственно. Известно, что $AB=7,\quad AC=6,\quad \sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{110}}{21}$. Найдите длину отрезка B_1C_1.

Решение:

Обозначим угол $\angle BAC$ через α. Возможны два случая: 1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и 2) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

I.Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{440}{21^2}}=\frac{\sqrt{441-440}}{21}=\frac{1}{21}$.

Из треугольника ABB_1 получаем: $\dfrac{AB_1}{AB} = \cos\alpha = \dfrac{1}{21}$. Найдём длину BC.

По теореме косинусов

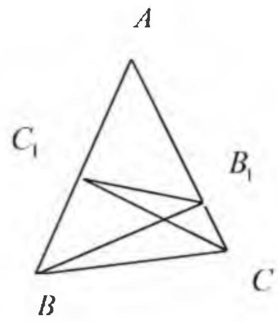
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha} = \sqrt{49+36-2\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{1}{21}} = \sqrt{81} = 9.$$

Отрезок BC является диаметром окружности, описанной как вокруг треугольника BB_1C, так и вокруг треугольника BC_1C. Следовательно, эта окружность описана вокруг четырёхугольника BC_1B_1C.

Значит, $\angle BC_1B_1 + \angle ACB = \pi$. С другой стороны, $\angle BC_1B_1 + \angle AC_1B_1 = \pi$. Следовательно,

$\angle ACB = \angle AC_1B_1$, откуда следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам, т.к. угол $\angle BAC$ - общий. Значит,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos\alpha.$$



Таким образом, $B_1C_1 = BC\cdot\cos\alpha = 9\cdot\dfrac{1}{21} = \dfrac{3}{7}$.

II. Пусть теперь $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Тогда

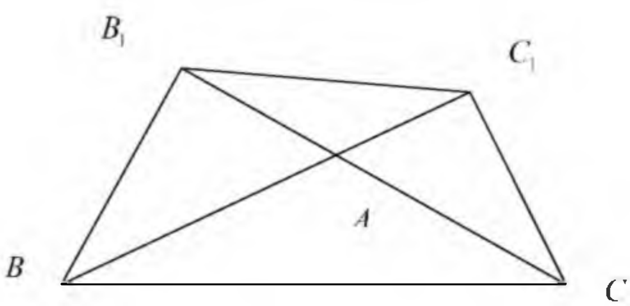
$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{440}{21^2}} = -\frac{\sqrt{441-440}}{21} = -\frac{1}{21}.$$

Из треугольника ABB_1 получаем:

$\dfrac{AB_1}{AB} = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{1}{21}$. По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha} = \sqrt{49+36+2\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{1}{21}} = \sqrt{49+40} = \sqrt{89}.$$

Как уже было доказано в пункте I, вокруг четырёхугольника BB_1C_1C можно описать окружность. Следовательно, $\angle BC_1B_1 = \angle B_1CB$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. Кроме того, $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$ как вертикальные углы, откуда и следует подобие треугольников ABC и AB_1C_1 по двум углам. Значит,



$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB} = \cos(\pi-\alpha) = \frac{1}{21} \text{ и } B_1C_1 = BC\cdot\cos(\pi-\alpha) = BC\cdot\frac{1}{21} = \frac{\sqrt{89}}{21}.$$

Ответ: $B_1C_1 = \frac{3}{7}$ или $B_1C_1 = \frac{\sqrt{89}}{21}$.

Задача 10

При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-4}{|2x+2|-|x+4|} = ax^2$ имеет не более одного корня?

ОДЗ: Знаменатель обращается в 0, если $2x+2 = \pm(x+4)$, т.е. при $x = \pm 2$. Для уравнения допустимы все x, кроме $x = \pm 2$.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на $|2x+2|+|x+4| > 0$.

$$\frac{(x^2-4)(|2x+2|+|x+4|)}{(2x+2)^2-(x+4)^2} = ax^2,$$

$$\frac{(x^2-4)(|2x+2|+|x+4|)}{3(x^2-4)} = ax^2,$$

$$|2x+2|+|x+4| = 3ax^2. \qquad (*)$$

Если $a \le 0$, то левая часть > 0, а правая — ≤ 0; уравнение (*) не имеет решений.

Если $a > 0$, уравнение (*) имеет по крайней мере 2 решения.

Исходное уравнение может иметь меньшее число решений, только если хотя бы одно из чисел ± 2 — решение (*).

2 — решение (*), если $12 = 12a,\ a = 1$; (-2) — решение (*), если $4 = 12a,\ a = 1/3$.

При $a = 1$ уравнение (*) принимает вид $|2x+2|+|x+4| = 3x^2$ и имеет корни $x_1 = -1,\ x_2 = 2$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x = -1$.

При $a = 1/3$ уравнение (*) принимает вид $|2x+2|+|x+4| = x^2$ и имеет корни $x_1 = -2,\ x_2 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$. Исходное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: : уравнение имеет не более одного корня при $a \le 0$, при $a = 1/3$ и при $a = 1$.