

**Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап**

10 класс

10.1. Коля написал на доске десятизначное число, состоящее из различных цифр. Саша дописал одну цифру так, чтобы получившееся число делилось на 9. Какую цифру мог дописать Саша?

10.2. Пусть $f(n)$ равно произведению чётных цифр натурального числа n или равно нулю, если чётных цифр нет. Найти сумму $f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

10.3. Решите систему уравнений в натуральных числах

$$\begin{cases} ab = c + d \\ cd = a + b \end{cases}$$

10.4. В изначально пустую комнату каждую минуту либо заходят 2 человека, либо выходит 1 человек. Может ли через 2019 минут в комнате быть ровно 2018 человек?

10.5. В ряд выписаны n целых чисел, так чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел положительна, а сумма любых пяти подряд идущих чисел отрицательна. При каком наибольшем n это возможно?

10.6. Дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$. На стороне AB выбрана точка E . Докажите, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ADE и BCE не зависит от выбора точки E .

10.7. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 2018×2020 на клетчатые прямоугольники 5×8 ?

10.5. В ряд выписаны n целых чисел, так чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел положительна, а сумма любых пяти подряд идущих чисел отрицательна. При каком наибольшем n это возможно?

10.6. Дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$. На стороне AB выбрана точка E . Докажите, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ADE и BCE не зависит от выбора точки E .

10.7. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 2018×2020 на клетчатые прямоугольники 5×8 ?