

**Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап**

9 класс

1. Может ли разность квадратов двух натуральных чисел равняться 2018?

Ответ: нет.

Решение: Разность квадратов натуральных чисел – это произведение разности и суммы двух натуральных чисел. Разность и сумма натуральных чисел имеют одинаковую четность. Следовательно, их произведение либо делится на 4, либо нечетно. А 2018 ни тем, ни другим не является.

2. Докажите, что графики квадратных трехчленов: $y = ax^2 - bx + c$, $y = bx^2 - cx + a$, $y = cx^2 - ax + b$ имеют общую точку.

Решение: Заметим, что при $x = -1$ значение $y = a + b + c$ для всех трёх трёхчленов, т.е. их графики пересекаются в точке $(-1; a + b + c)$.

3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром в точке O , пересекаются в точке P . Известно, что $OP \perp BC$. Докажите, что $AB = CD$.

Решение: Пусть OP пересекает BC в точке K . OK – высота равнобедренного треугольника BOC ($BO = OC$ как радиусы), значит, OK – медиана и K – середина BC . PK – высота и медиана в треугольнике BPC , значит, треугольник BPC – равнобедренный, $BP = PC$ и $\angle PBC = \angle PCB$. $\angle PAD = \angle PBC$ и $\angle PCB = \angle PDA$ как опирающиеся на одни и те же дуги. Значит, $\angle PAD = \angle PDA$ и $PA = PD$. $\angle APB = \angle CPD$ как вертикальные, $PA = PD$, $PB = PC$, значит, треугольники APB и DPC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AB = CD$.

4. Решите уравнение

$$x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}} = 1 + x^{2019}.$$

Ответ: $x = 1$.

Решение: $x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}} \geq 2$ при $x \neq 0$, потому что $x^{4036} - 2x^{2018} + 1 = (x^{2018} - 1)^2 \geq 0$. $x^{2019} = x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}} - 1 \geq 2 - 1 = 1$. $x \geq 1$. Если $x > 1$, $x^{2019} + 1 > x^{2018} + \frac{1}{x^{2018}}$, потому что $x^{2019} = x * x^{2018} > x^{2018}$ и $1 > \frac{1}{x^{2018}}$. Противоречие, значит $x \leq 1$. $x \geq 1$, $x \leq 1$, значит $x = 1$. $x = 1$ действительно является решением уравнения.

5. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 30 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна квадрату некоторого натурального числа?

Ответ: нет.

Решение: Заметим, что рядом с числом 18 может стоять только число 7. Поэтому числа так по кругу поставить нельзя (у 18 должно быть два соседа).