Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап

8 класс

1. Можно ли заменить буквы цифрами от 0 до 9 так, чтобы выполнялось равенство $\text{С} \times \text{Т} \times \text{О} = \text{Ц} \times \text{И} \times \text{Ф} \times \text{Р} \times \text{А}$. Разным буквам соответствуют разные цифры.

Ответ: нет.

Решение: Предположим, что такое возможно. Ни одна из цифр не равна 0, потому что тогда произведение с одной стороны равно 0, а с другой стороны равенства - нет. Тогда все 8 букв – цифры от 1 до 9, а значит, среди них есть все цифры, кроме одной, потому среди них есть 5 или 7. Но тогда одно из произведений делится на 5 (7), а другое – нет. Противоречие.

Критерии: Доказано что среди данных цифр нет нуля – 1 балл. Доказано, что нет нуля и 5 – 2 балла.

2. В вершинах правильного 2018-угольника расставлены числа: 2017 нулей и 1 единица. За один ход разрешается прибавить или вычесть по единице к числам в концах любой стороны многоугольника. Можно ли добиться того, чтобы все числа делились на 3?

Ответ: нет.

Решение: Раскрасим вершины в белый и чёрный цвета так, чтобы цвета чередовались. Тогда разница между суммой чисел в белых вершинах и суммой чисел в чёрных вершинах изначально равна 1, а при любом ходе не меняется (к обеим суммам прибавляется по 1). Предположим противное. Тогда обе суммы делятся на 3, т.к. все числа делятся на 3. Поэтому и их разница делится на 3, но 1 не делится на 3. Противоречие.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AB = AC = AD = BD$ и $\angle BAC = \angle CBD$. Найдите $\angle ACD$.

Ответ: $70°$.

Решение: Треугольник ABD равносторонний, поэтому углы $\angle ABD = \angle BDA = \angle DAB = 60°$. Обозначим $\angle BAC = \angle CBD = \alpha$, тогда $\angle ABC = 60° + \alpha$. $AB = AC$, значит $\angle ACB = \angle ABC = 60° + \alpha$. Сумма углов в треугольнике ABC равна $\alpha + (60° + \alpha) + (60° + \alpha) = 180°, 3\alpha = 60°, \alpha = 20°$. Угол $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 60° - 20° = 40°$. $AC = AD$, значит $\angle ACD = \angle ADC = \beta$, сумма углов в треугольнике ACD $40° + 2\beta = 180°, 2\beta = 140°, \angle ACD = \beta = 70°$.

Критерии: Найден угол $\angle BAC = \angle CBD = 20°$ - 4 балла.

4. Решите уравнение в целых числах $x^2 + y^2 = 3xy$.

Ответ: $x = y = 0$.

Решение: Если оба числа не равны 0, разделим числа x и y на их наибольший общий делитель, получатся взаимно простые числа a и b. Правая часть уравнения делится на 3, значит и левая тоже. Квадрат целого числа может давать остаток 0 или 1 при делении на 3, значит, a^2 и b^2 делятся на 3, поэтому a и b делятся на 3. Противоречие, потому что a и b взаимно просты и имеют общий делитель 3, больший 1.

Критерии: Только за правильный ответ – 1 балл. Замечено, что x и y обязаны делиться на 3 – 3 балла.

5. Сколькими способами можно разбить кучу из 100 камней на кучки так, чтобы количество камней в любых двух кучках отличалась не более чем на единицу?

Ответ: 99.

Решение: Докажем, что для любого k от 2 до 100 кучу можно разбить на k таких кучек единственным образом. $100 = qk + r$, где q и r – неполное частное и остаток 100 при делении на k соответственно. Пусть есть куча, в которой не больше $q - 1$ камня, то в оставшихся $k - 1$ кучах не меньше $101 - q = q(k-1) + (r+1)$ камней. Тогда в какой-то куче не меньше $q + 1$ камня, ведь иначе камней в $k - 1$ кучах будет не больше $q(k-1)$, что меньше $q(k-1) + (r+1) = 101 - q$. Нашлись две кучи, не подходящие по условию (в которой не меньше $q + 1$ и в которой не больше $q - 1$). Противоречие. Пусть есть куча, в которой не менее $q + 2$ камней. Тогда в оставшихся $k - 1$ кучах камней не больше $99 - q$. Тогда в какой-то куче не больше q камней, ведь иначе камней в $k - 1$ кучах было бы не меньше $(k-1)(q+1) = (kq + k) - 1 - q > (kq + r) - 1 - q > 100 - 1 - q = 99 - q$. Нашлись две кучи, в которых количества камней отличаются хотя бы на 2. Тогда во всех кучах q или $q + 1$ камень. Пусть куч с q камнями t, тогда с $q + 1$ камнями $k - t$, всего камней $100 = qt + (q+1)(k-t) = qt + qk - qt + k - t = (qk + r) - r + k - t = 100 - r + k - t, t = k - r$, т.е. способ единственен.

Критерии: За правильный ответ «99» – 1 балл. За ответ «100» тоже ставить 1 балл.