

Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап

7 класс

7.1. На Луне используются монеты достоинством в 5 и 9 сантиков. Как Незнайке купить газировку за 22 сантика? (если у Незнайки и у продавца достаточное количество монет и того, и другого достоинства)

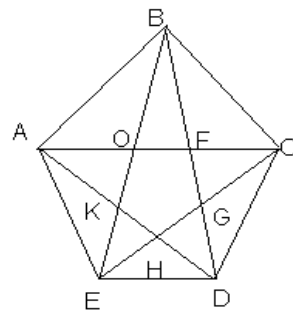
Ответ: $9 + 9 + 9 - 5 = 22$. Т.е. Незнайка должен заплатить тремя монетами в 9 сантиков и получить сдачу 5 сантиков.

Критерии:

7.2. Что больше: сумма длин сторон выпуклого пятиугольника или сумма длин его диагоналей?

Ответ: Сумма длин диагоналей больше.

Решение: Выпишем пять раз неравенство треугольника для треугольников содержащих части диагоналей и сторон пятиугольника. $AC + CE + EB + BD + DA > (AO + OB) + (BF + FC) + (CG + GD) + (DH + HE) + (EK + KA) > AB + BC + CD + DE + EA$.



7.3. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 15 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна квадрату некоторого натурального числа?

Ответ: нет.

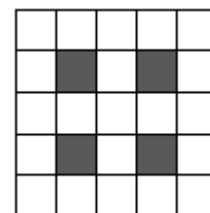
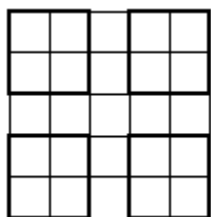
Решение: Рассмотрим число 9. У него может быть только один сосед 7, чтобы их сумма была полным квадратом. Следовательно, так расставить числа нельзя.

7.4. Вася вырезает клетчатые квадраты 2×2 из клетчатого квадрата 5×5 . Вася остановится, когда поймёт, что не может вырезать квадрат 2×2 . Сколько квадратов 2×2 он может вырезать?

Ответ: 4

Решение: Раскрасим квадрат 5×5 как показано на рисунке справа.

Видно, что любой квадрат 2×2 содержит ровно одну закрашенную клетку. Следовательно, больше 4 квадратов невозможно вырезать.



Теперь раскрасим квадрат 5×5 как показано на рисунке слева. Видно, что любой квадрат 2×2 пересекается ровно с 1 из выделенных квадратов. Т.е. меньше 4 квадратов невозможно вырезать.

Критерии: Доказан минимум или максимум – 3 балла.

7.5. Учительница записала на доске два числа: 2017 и 2018. Коля и Толя ходят по очереди, начинает Коля. За один ход можно либо уменьшить одно из чисел на единицу; либо разделить одно из чисел на любой его делитель больше единицы. Выигрывает тот, кто первым получит ноль. У кого из них есть выигрышная стратегия?

Ответ: У Коли.

Решение: Пусть Коля сначала уменьшит 2018 на 1, тогда оба числа станут равными 2017. Если Толя после своего хода уменьшил число до 1, то Коля уменьшает 1 до 0 и выигрывает. В ином случае Коля делает такой же ход, как и Толя, только с другим числом, делая оба числа равными. Толя не выиграет, потому что перед его ходом оба числа будут не меньше 2, из которых 0 сразу сделать не получится. Игра не может закончиться вничью, потому что сумма двух чисел уменьшается, являясь целой и неотрицательной.