Северо-Восточная олимпиада по математике
2017-2018 учебный год
Заключительный этап

10 класс

10.1. Коля написал на доске десятизначное число, состоящее из различных цифр. Саша дописал одну цифру так, чтобы получившееся число делилось на 9. Какую цифру мог дописать Саша?

Ответ: 0 или 9.

Решение: Сумма всех 10 цифр от 0 до 9 равна 45. Саша должен приписать цифру так, чтобы сумма цифр в получившемся числе делилась на 9 (признак делимости на 9). Сумма цифр будет делиться на 9, если приписать 0 или 9.

Критерии: Только за правильный ответ 0 или 9 – 1 балл. За правильный ответ 0 и 9 – 2 балла.

10.2. Пусть $f(n)$ равно произведению чётных цифр натурального числа n или равно нулю, если четных цифр нет. Найти сумму $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)$.

Ответ: 620

Решение: при однозначном числе n f(n) будет равно самому n, если оно чётно и 0, если оно нечётно. Для однозначных n получаем сумму 2+4+6+8=20. Если n двузначно, разберём случаи:

1) если обе цифры чётные. Тогда первая цифра может быть равна 2,4,6 или 8, а вторая – 0,2,4,6 или 8. Общая сумма получится 2*0+2*2+…+2*8+4*0+…+8*8=2*(0+2+4+6+8)+…+8*(0+…+8)=(2+4+6+8)*(0+2+4+6+8)=20*20=400.
2) Если первая цифра чётна, а вторая – нет. Тогда для каждой из начальных чётных цифр (2,4,6 или 8) найдутся 5 нечётных вторых цифр и потому общая сумма равна 2*5+4*5+6*5+8*5=(2+4+6+8)*5=20*5=100.

3) Если первая цифра нечётна, а вторая чётна. Тогда для каждой из конечных чётных цифр (0,2,4,6 или 8) найдутся 5 нечётных первых цифр и потому общая сумма равна 0*5+2*5+4*5+6*5+8*5=(0+2+4+6+8)*5=20*5=100.
4) Если обе цифры нечётны, то значение функции равно 0.

Просуммируем полученные значения: 20+400+100+100+0=620.

Критерии: Только за правильный ответ – 1 балл.

10.3. Решите систему уравнений в натуральных числах

$$\begin{cases} ab = c + d \\ cd = a + b \end{cases}$$

Ответ: (1;5;2;3), (1;5;3;2), (5;1;2;3), (5;1;3;2), (2;2;2;2), (2;3;1;5), (2;3;5;1), (3;2;1;5), (3;2;5;1).

Решение: Сложив уравнения, перенеся всё в одну сторону и прибавив к обеим частям уравнения по 2, получим

$$ab - a - b + 1 + cd - c - d + 1 = 2;$$
$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Оба слагаемых неотрицательны, потому что множители в них неотрицательны.

Поэтому есть 3 варианта:

1) $(a-1)(b-1) = 0, (c-1)(d-1) = 2$. Тогда одно из чисел $c-1$ и $d-1$ равно 1, а другое 2, т.е. одно из чисел c и d равно 2, а другое – 3. $a+b = cd = 6$. Из $(a-1)(b-1) = 0$ понятно, что $a-1$ или $b-1$ равно 0, т.е. $a = 1$ или $b = 1$. Но тогда $b = 6-1 = 5$ или $a = 6-1 = 5$. Все четвёрки $(1;5;2;3), (5;1;2;3), (1;5;3;2), (5;1;3;2)$ чисел $(a;b;c;d)$ подходят.
2) $(a-1)(b-1) = (c-1)(d-1) = 1$. Тогда $a-1 = b-1 = c-1 = d-1 = 1, a = b = c = d = 2$.
3) $(a-1)(b-1) = 2, (c-1)(d-1) = 0$. Разбирается аналогично случаю 1, получатся четвёрки $(2;3;1;5), (2;3;5;1), (3;2;1;5), (3;2;5;1)$.

Критерии: Только за правильный ответ 1,2,3,5 **и** 2,2,2,2 – 1 балл. Задача решена верно но не все 9 ответов найдены – 6 баллов.

10.4. В изначально пустую комнату каждую минуту либо заходят 2 человека, либо выходит 1 человек. Может ли через 2019 минут в комнате быть ровно 2018 человек?

Ответ: нет.

Решение: Каждую минуту остаток числа людей в комнате при делении на 3 меняется либо с 0 на 2, либо с 1 на 0, либо с 2 на 1. Значит, за 3 раза остаток от числа людей в комнате при делении на 3 не изменится. 2019 – это 673 раза по 3, поэтому остаток через 2019 минут будет как сначала, т.е. 0. Но 2018 не делится на 3.

10.5. В ряд выписаны n целых чисел, так чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел положительна, а сумма любых пяти подряд идущих чисел отрицательна. При каком наибольшем n это возможно?

Ответ: 6.

Решение: Приведем пример для $n = 6 : 3, -5, 3, 3, -5, 3.$ Докажем, что для $n \geq 7$ не удастся выписать в ряд числа, удовлетворяющие условию задачи. Составим таблицу для первых 7 чисел из этого ряда

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{matrix}$$

По условию: сумма чисел в каждой строке должна быть отрицательна, а в каждом столбце положительна. Следовательно, сумма всех чисел таблице с одной стороны должна быть положительна, с другой стороны отрицательна. Противоречие.

Критерии: Только за правильный ответ – 1 балл. Правильный ответ с примером – 2 балла.

10.6. Дана трапеция $ABCD, AD \parallel BC$. На стороне AB выбрана точка Е. Докажите, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников ADE и BCE не зависит от выбора точки E.

Решение: Центр описанной окружности треугольника ADE лежит на пересечении серединных перпендикуляров AD и EA. А центр описанной окружности треугольника BCE лежит на пересечении серединных перпендикуляров BC и BE, т.е. на пересечениях двух пар параллельных прямых. А т.к. расстояние между серединами отрезков BE и EA не зависит от выбора точки E, то расстояние между центрами окружностей является константой.

10.7. Можно ли разрезать клетчатый прямоугольник 2018×2020 на клетчатые прямоугольники 5×8?

Ответ: нет.

Решение: Заметим, что 2018×2020 нельзя разбить на прямоугольники 1×8 (понять это можно из диагональной раскраски в 8 цветов – каждый прямоугольник 1×8 будет покрывать по клетке каждого цвета, выложим прямоугольники 1×8 в виде прямоугольников 2016×2016, 2×2016 и 4×2016, тогда в них будет равное количество клеток каждого цвета, а в оставшемся 4*2 – неравное, потому и во всём 2018*2020 – неравное количество клеток для некоторых цветов). Пусть прямоугольник 2018*2020 можно разрезать на прямоугольники 5*8. Тогда, разрезав каждый прямоугольник 5*8 на 5 прямоугольников 1*8, получим, что 2018*2020 можно разрезать на 1*8. Противоречие.