

9 класс

1. Докажите неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2017^2} < \frac{2016}{2017}$.

Пояснение: Использовать неравенство $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2. Упростите выражение $\sqrt{3 \cdot 2^{1007} + \sqrt{2^{2017}}} + \sqrt{3 \cdot 2^{1007} - \sqrt{2^{2017}}}$.

Ответ: 2^{505}

3. Первые члены геометрических прогрессий (b_n) и (c_n) с положительными знаменателями равны $a + 1$ и a ($a > 1$) соответственно, а знаменатель второй прогрессии равен квадрату первой. Докажите, что если a равен степени с натуральным показателем знаменателя прогрессии (b_n) , то все корни квадратных уравнений $x^2 + b_n x + c_n = 0$ являются членами одной геометрической прогрессии.

Пояснение: Использовать теорему Виета.

4. Найдутся ли попарно различные положительные числа a , b и c такие, что

$$a^{2017} > b^{2016}, b^{2017} > c^{2016}, c^{2017} > a^{2016}?$$

Ответ: Да.

5. Точки M и N лежат на сторонах AD и DC соответственно квадрата $ABCD$, а точки E и F внутри этого квадрата. Известно, что $AE=EM=DF=NF$, $AM=DN$ и точка F лежит на отрезке EM . Докажите, что $\angle AEM = \angle NMD$.

Пояснение: Треугольники AEM и NFD равны. Четырехугольник $FMDN$ вписанный. Далее использовать равенство вписанных углов.