

10 класс

1. Лесоперерабатывающий комбинат решил вырубить лиственницы в лесу, но это встревожило экологов. Но в ответ директор лесоперерабатывающего комбината привел следующие данные: «Будет произведена вырубка только лиственницы, которая составляет 99% всех деревьев. После вырубки лиственница составит 96% леса». И это успокоило экологов. Сколько процентов леса вырубит комбинат?

Ответ: 75%.

2. Через центр описанной окружности треугольника ABC проведена прямая l перпендикулярная плоскости этого треугольника. Точки D и E не лежат на плоскости данного треугольника. Плоскости, проходящие через середины отрезков AD и AE и перпендикулярные им пересекаются по прямой l_1 . Докажите, что если прямые l и l_1 пересекаются, то точки A, B, C, D и E лежат на одной сфере.

Пояснение: Точка пересечения прямых l и l_1 является центром этой сферы.

3. Из множества первых миллион натуральных чисел убрали все полные квадраты, полные кубы и все четвертые степени натуральных чисел. Сколько осталось чисел в этом множестве?

Ответ: 998910.

4. Решить уравнение $20x^2 + 17y = 2017$ в натуральных числах.

Ответ: (10; 1); (7; 61).

5. Стороны треугольника ABC продолжены так, что точка B лежит на отрезке AB_1 , и длина $AB_1 = 3AB$, точка C лежит на отрезке BC_1 , и длина $BC_1 = 3BC$, точка A лежит на отрезке CA_1 , и длина $CA_1 = 3CA$. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: $19S$.

6. Докажите, что если $f(x + y) \geq f(xy)$ для всех $x, y \in R$, то $f(x)$ константа.

Пояснение: Если вместо y уподставить 0, выяснится что $f(0)$ - наименьшее значение этой функции. Если вместо y уподставить $(-x)$, то получится, что данная функция является константой для отрицательных значений аргумента. Если вместо x уподставить $(-t)$, где t положительно, узнаем что и для положительных значений аргумента функция является константой.

7. По круговой дорожке длиной 3 километра бегут 5 спортсменов. Докажите, что в любой момент времени существует 4 пары спортсменов, расстояние между которыми не более 1 километра.

Пояснение: Использовать, то, что среди любых трех спортсменов найдутся двое, расстояние между которыми не более 1 километра.