9 класс

1 вариант

1. а) Найдутся ли 10 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016;
б) Найдутся ли 7 последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016.

Ответ: а)Нет; б) Да.

Решение: а) Предположим, что $a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+9) = 10a + 45 = 2016 \Leftrightarrow 10a = 1971$. Так как последнее равенство невозможно для натуральных a, ответ – "нет".

б)285+286+287+288+289+290+291=2016.

Критерии оценивания. Верное решение – 20 баллов; в пункте а) за доказательство – 11 баллов; в пункте б) за пример – 9 баллов.

2. Действительные числа a и b таковы, что $\dfrac{6a+9b}{a+b} < \dfrac{4a-b}{a-b}$. Докажите, что $|b| < |a| < 2|b|$.

Решение.

$$\frac{6a+9b}{a+b} < \frac{4a-b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{6a+9b}{a+b} - \frac{4a-b}{a-b} < 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2-8b^2}{a^2-b^2} < 0$$

Решая последнее неравенство относительно a^2 получаем $b^2 < a^2 < 4b^2$, что равносильно неравенствам $|b| < |a| < 2|b|$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Верное решение – 20 баллов; полного доказательства нет, но есть продвижения, содержащие верные рассуждения и выкладки — 6 - 12 баллов.

3. Коэффициенты квадратных трехчленов: $f_i(x) = x^2 + b_i x + c_i$, удовлетворяют равенствам $\dfrac{b_{i+1}}{b_i} = 2$, $c_i = -32 \cdot b_i - 1024$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Известно, что корнями многочлена $f_1(x)$ являются числа 32 и -31. а) Найдите корни квадратного трехчлена f_{12}; б) найдите корни квадратного трехчлена f_i.

Ответ: 2016; 32.

Решение: По теореме Виета: $b_1 = -(32 + (-31)) = -1$, $c_1 = -32 \cdot (-1) - 1024 = 32 - 1024 = -992$. Следовательно, $b_i = -2^{i-1}$, $c_i = -32 \cdot (-2^{i-1}) - 1024 = 2^{i+4} - 2^{10}$.

Решая квадратное уравнение

$$x^2 - 2^{i-1}x + 2^{i+4} - 2^{10} = 0$$

находим:

$$D = \left(2^{i-1}\right)^2 - 4\left(2^{i+4} - 2^{10}\right) = \left(2^{i-1}\right)^2 - 2 \cdot 2^{i-1} \cdot 2^6 + 2^{12} = \left(2^{i-1} - 2^6\right)^2, \sqrt{D} = |2^{i-1} - 2^6|.$$

а) При $i > 6$ $x_1 = \dfrac{2^{i-1} + 2^{i-1} - 2^6}{2} = 2^{i-1} - 2^5, x_2 = \dfrac{2^{i-1} - 2^{i-1} + 2^6}{2} = 2^5$.

При $i \le 6$ $x_1 = \dfrac{2^{i-1} - 2^{i-1} + 2^6}{2} = 2^5, x_2 = \dfrac{2^{i-1} + 2^{i-1} - 2^6}{2} = 2^{i-1} - 2^5$.

б) При $i = 12$ получаем

$$x_1 = 2016, x_2 = 32.$$

Критерии оценивания. Верное решение – 20 баллов; не учтен знак при нахождении корня дискриминанта – 15 баллов; решен только пункт а) – 12 баллов; первые члены последовательности найдены правильно, но ответ неверный – 6 баллов; только правильный ответ – 3 балла.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) углы ABD и DBC равны $135°$ и $15°$ соответственно, $BD = \sqrt{6}$. Найдите периметр трапеции.

Ответ: $9 - \sqrt{3}$.

Заметим, что $\angle DBC = \angle ACB = \angle BDA = \angle CAD = 15°$, $\angle BAC = 30° - \angle DBC = 15°$, поэтому AC – биссектриса угла A. Так как $\angle BAC = \angle CAB = \angle CDB = 15°$, то треугольники ABC и BCD равнобедренные и $AB = BC = CD$. По теореме синусов

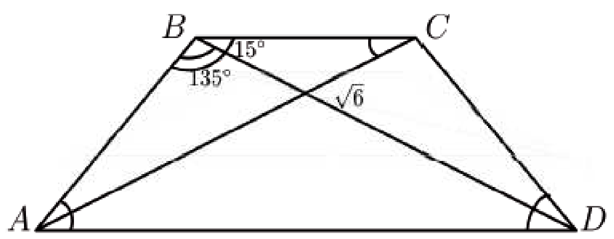

Рис. 1:

для треугольника ABD: $\dfrac{BD}{\sin 30°} = \dfrac{AD}{\sin 135°}$, откуда

$$AD = 2\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов для этого же треугольника:

$$AB^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot AB \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - 6AB + 6 = 0.$$

Из последнего уравнения находим $AB = 3 - \sqrt{3}$ (второй корень не подходит по смыслу, так как напротив большего угла должна лежать большая сторона). И наконец:

$$AB + BC + CD + AD = 3 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9 - \sqrt{3}.$$

Критерии оценивания. Верное решение – 20 баллов; ход решения правильный, но в результате арифметической ошибки получен неверный ответ — 15 баллов; периметр не найден, но доказано, что $AB = BC = CD$ — 6 баллов.

5. В ячейках таблицы 9×9 вписаны нечетные целые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторой строки или некоторого столбца. Доказать, что при помощи нескольких таких операций можно прийти к таблице, у которой суммы чисел любой строки и любого столбца будут положительны.

Решение. Так как сумма нечетного числа нечетных чисел нечетно, то сумма чисел любой строки (любого столбца) получающихся таблиц не может равняться нулю (т.е. строго положительна или строго отрицательна). Далее, заметим, что сумма всех чисел таблицы, получающаяся при помощи таких операций не превосходит суммы модулей всех чисел первоначальной таблицы. Следовательно, среди всевозможных таблиц, получающихся из первоначальной при помощи данной операции (а таких таблиц конечное число, не превосходящее 2^{81}), существуют таблицы с наибольшей возможной суммой всех чисел. У такой таблицы суммы чисел любой строки и любого столбца будут положительны. Действительно, если бы сумма чисел какого-нибудь столбца (или строки) была отрицательной, то поменяв знаки всех чисел этой строки (или столбца) мы бы получили таблицу с большей суммой всех чисел.

Критерии оценивания. Верное решение – 20 баллов; показано существование таблицы с наибольшей возможной суммой – 12 баллов, показано, что сумма чисел любой строки (столбца) либо строго положительна либо строго отрицательна – 6 баллов.