11 класс

1. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 1996 раз, а другое уменьшили в 96 раз, их сумма не изменилась. Чему может равняться их частное?

   Решение. Пусть первое число равно a, а второе b. Тогда должно выполняться равенство $1996a + \frac{b}{96} = a + b$, из которого находим, что $2016a = b$. Следовательно, их частное равно 2016 или $\frac{1}{2016}$.

   Ответ: 2016 или $\frac{1}{2016}$.

   Критерии: Полное решение – 14 баллов; за правильный ответ без решения – 2 балла.

2. Параллелепипед составлен из белых и черных единичных кубиков в шахматном порядке. Известно, что черных кубиков на $1\frac{12}{13}\%$ больше, чем белых. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если известно, что каждая сторона параллелепипеда больше 1.

   Решение. Количество черных и белых кубиков может отличаться только на 1. Следовательно, 1 кубик это $1\frac{12}{13}\%$ количества белых кубиков. Значит, белых кубиков 52 штуки, черных 53, а всего 105 кубиков. Т.е. наш параллелепипед 3x5x7. Площадь поверхности равна 142.

   Ответ: 142.

   Критерии: За обоснованное правильное решение - 14 баллов. Правильное решение с арифметической ошибкой - 12 баллов. Если написано, что черных кубиков на 1 больше чем белых - 6 баллов. Только за правильный ответ - 2 балла.

3. Решите неравенство

$$\log_{3+sinx-cosx}(3 - \frac{cos2x}{cosx + sinx}) \geq e^{\sqrt{x}}$$

   Решение. Учитывая, что $cosx + sinx \neq 0$ и $3 + sinx - cosx > 1$;

$$\log_{3+sinx-cosx}(3 - \frac{cos2x}{cosx + sinx}) = \log_{3+sinx-cosx}(3 - \frac{cos^2x - sin^2x}{cosx + sinx}) =$$

$$= \log_{3+sinx-cosx}(3 - \frac{(cosx + sinx)(cosx - sinx)}{cosx + sinx}) =$$

$$= \log_{3+sinx-cosx}(3 + sinx - cosx) = 1.$$

   Получим неравенство $1 \geq e^{\sqrt{x}}$. Следовательно, $x = 0$.

   Ответ: 0

   Критерии: Полное решение – 14 баллов; доказано, что левая часть неравенства равна 1 – 8 баллов; только ответ – 2 балла.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна стороне основания. На боковых ребрах SD и SB пирамиды отмечены точки M и N соответственно так, что прямые AM и CN взаимно перпендикулярны. Докажите, что

$$2SA(SM + SN) = SA^2 + SM \cdot SN.$$

Решение. Систему координат расположим так, что начало координат совпадает с вершиной A, а оси, как показано на рисунке 1.

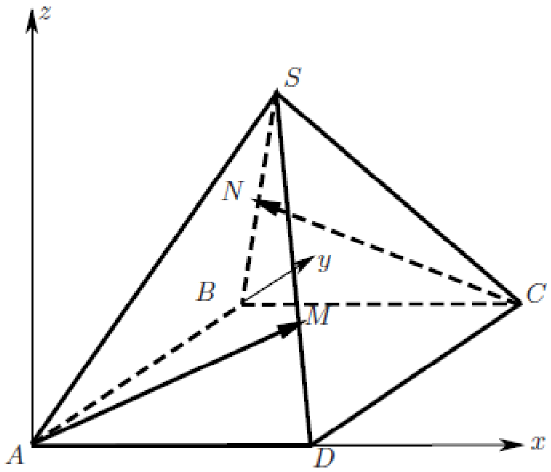

Рис. 1:

Будем считать, что длина стороны основания пирамиды равна 2. Тогда $\overrightarrow{AB}\{0,2,0\}$, $\overrightarrow{AC}\{2,2,0\}$, $\overrightarrow{AD}\{2,0,0\}$, $\overrightarrow{AS}\{1,1,2\}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \{-2,0,0\}$, $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC} = \{-1,-1,2\}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = \{-1,1,-2\}$, $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS} = \{1,-1,-2\}$.

Выразим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ через $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SN}$:

$$\overrightarrow{SN} = \frac{SN}{SB} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{SN}{SA} \cdot \overrightarrow{SB}, \quad \overrightarrow{SN}\left\{-\frac{SN}{SA}, \frac{SN}{SA}, -2 \cdot \frac{SN}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{SM} = \frac{SM}{SD} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{SM}{SA} \cdot \overrightarrow{SD}, \quad \overrightarrow{SM}\left\{\frac{SM}{SA}, -\frac{SM}{SA}, -2 \cdot \frac{SM}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = \left\{\frac{SA + SM}{SA}, \frac{SA - SM}{SA}, 2 \cdot \frac{SA - SM}{SA}\right\},$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SN} = \left\{-\frac{SA + SN}{SA}, -\frac{SA - SN}{SA}, 2 \cdot \frac{SA - SN}{SA}\right\}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$:

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}) = -\frac{(SA + SM)(SA + SN)}{SA^2} - \frac{(SA - SM)(SA - SN)}{SA^2} + 4 \cdot \frac{(SA - SM)(SA - SN)}{SA^2}.$$

Для перпендикулярности прямых AM и CN необходимо, чтобы скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ равнялось нулю. Приравняв полученное выражение нулю и проделав необходимые преобразования получим требуемое равенство.

Критерий: Полное решение – 14 баллов; ход рассуждения верный, но в результате ошибки при выкладках, требуемый результат не получен – 10 баллов; получены верные выражения для векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ – 6 баллов; получены координаты векторов кроме $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$ – 2 балла.

5. Решить уравнение при всех значениях параметра a

$$3x^2 + 2ax - a^2 = \ln \frac{x-a}{2x}.$$

Решение: Если $a = 0$, то уравнение примет вид $3x^2 = \ln \frac{1}{2}$, которое не имеет решений. Если $a \neq 0$, то x не принадлежит отрезку $[0, a]$ или $[a, 0]$ в зависимости от знака параметра a, т.к. иначе натуральный логарифм не существует. Преобразуем уравнение к виду:

$$4x^2 + \ln|2x| = (x-a)^2 + \ln|x-a|. \quad (*)$$

Пусть $f(t) = |t|^2 + \ln|t|$. Тогда $(*)$ примет вид $f(2x) = f(x-a)$. Заметим, что $f(t)$ четная и строго возрастающая при $t \geq 0$ функция (т.к. является суммой двух возрастающих при $t \geq 0$ функций). Значит, $f(2x) = f(x-a)$ только, если $2x = x - a$ или $-2x = x - a$. Следовательно, $x = -a$ или $x = \frac{a}{3}$. Но точка $x = \frac{a}{3}$ лежит между a и 0, поэтому $x = -a$ единственное решение уравнения.

Ответ: При $a = 0$ решений нет. При $a \neq 0$ единственное решение $x = -a$.

Критерии: Полное решение – 14 баллов. Получено выражение вида $(*)$ – 4 балла. Если точка $x = \frac{a}{3}$ не исключена, то -4 балла. Если не указано, что при $a = 0$ решений нет, то -2 балл.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ окружность описанная около треугольника COD (O – точка пересечения диагоналей) проходит через центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Решение. Пусть O_1 – центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Из

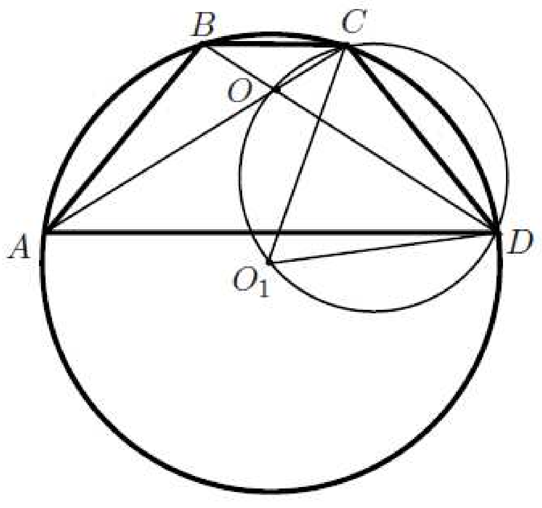

Рис. 2:

условия следует, что $\angle COD = \angle CO_1D = \smile CD$. С другой стороны, $\angle COD = \dfrac{\smile AB + \smile CD}{2}$. Из двух равенств получаем, что $\smile AB = \smile CD$. Следовательно $BC || AD$, что и требовалось доказать.

Критерий: Полное решение – 15 баллов; доказательства нет, но есть продвижения в верном направлении – до 7 баллов.

7. Существуют ли 2016 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 16 простых чисел?

Решение. Введем функцию $S(n)$, равную количеству простых чисел от n до $n+2015$. Заметим, что $S(n)$ отличается от $S(n+1)$ не более, чем на 1. $S(2017!+2)=0$, $S(1)>16$ $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, ...$ - простые числа). Следовательно, существует число m такое, что $S(m)=16$. Т.е. среди чисел от m до $m+2015$ ровно 16 простых чисел.

Ответ: Да, существуют.

Критерии: Полное решение – 15 баллов; если не показано, что среди первых 2015 чисел простых чисел более $16 - 13$ баллов; за правильный ответ без решения – 0 баллов.