10 класс

1. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 1996 раз, а другое уменьшили в 96 раз, их сумма не изменилась. Чему может равняться их частное?

   Решение. Пусть первое число равно a, а второе b. Тогда должно выполняться равенство $1996a + \frac{b}{96} = a + b$, из которого находим, что $2016a = b$. Следовательно, их частное равно 2016 или $\frac{1}{2016}$.

   Ответ: 2016 или $\frac{1}{2016}$.

   Критерии: Полное решение – 14 баллов; за правильный ответ без решения – 2 балла.

2. Плитка черно-белого шоколада состоит из отдельных долек, образующих n горизонтальных и m вертикальных рядов, раскрашенных в шахматном порядке. Ян съел все черные дольки, а Максим все белые. Чему равно $m + n$, если известно, что Ян съел на $8\frac{1}{3}\%$ больше долек, чем Максим.

   Решение. Количество черных и белых долек может отличаться только на 1. Следовательно, Ян съел на 1 дольку больше чем Максим. Если 1 долька это $8\frac{1}{3}\%$, то Максим съел 12 долек, Ян съел 13 долек и вместе они съели 25 долек. Значит, шоколадка была 5x5.

   Ответ: 10.

   Критерии: За обоснованное правильное решение - 14 баллов. Правильное решение с арифметической ошибкой - 12 баллов. Если написано, что Ян съел на 1 дольку больше Максима - 6 баллов. Только за правильный ответ - 2 балла. (За ответ 26=25+1 баллы не снимать.)

3. Функция $f(x)$ такова, что для всех натуральных $n > 1$ существует простой делитель p числа n такой, что
$$f(n) = f(\frac{n}{p}) - f(p).$$
   Известно, что $f(1001) = 1$. Чему равно $f(1002)$?

   Решение: Заметим, что для любого простого числа p значение $f(p) = f(1) - f(p)$. Значит $f(p) = \frac{f(1)}{2}$ для любого простого числа. Для простых чисел p и q получим, что либо $f(pq) = f(p) - f(q) = 0$, либо $f(pq) = f(q) - f(p) = 0$. Для трех простых чисел p, q и r получим, что $f(pqr) = f(pq) - f(r) = -f(r) = -\frac{f(1)}{2}$ (порядок простых чисел может быть и другим). Тогда $f(1001) = f(7 \cdot 11 \cdot 13) = -\frac{f(1)}{2} = 1$. Но тогда $f(1002) = f(2 \cdot 3 \cdot 167) = -\frac{f(1)}{2} = 1$.

   Ответ: 1.

   Критерии: Полное решение – 14 баллов. Показано, что $f(1) = -2$ или имеется доказательство того, что $f(pq) = 0$ – 4 балла.

4. На прямой отмечено 3025 точек. Середины каждых двух из отмеченных точек покрасили в зеленый, синий или красный цвет. Докажите, что количество покрашенных в один из цветов точек на прямой не менее 2016.

Решение. Для начала рассмотрим три точки. Очевидно, что для трех точек на прямой середины каждых двух из них есть три различные точки. Рассмотрим крайнюю точку на прямой. Середины между ней и двумя ближайшими к ней точками есть две точки, которые не являются серединами других точек. Если убрать эту крайнюю точку, то количество покрашенных точек уменьшится хотя бы на две. Далее убираем еще одну крайнюю точку. Тогда количество покрашенных точек уменьшится еще хотя бы на две. И так далее пока не останется три точки. Получаем, что покрашенных точек не меньше $3+(n-3)\cdot 2=3+2n-6=2n-3$, где n — количество отмеченных точек. В случае, если на прямой расположено 3025 точек, то середин отмечено не менее $2\cdot 3025-3=6047$. Такое возможно, если все отмеченные точки расположены на одинаковых расстояниях от соседних. Предположим, что точек каждого цвета не более 2015. Тогда их должно быть не более $3\cdot 2015=6045$, а покрашенных точек не менее 6047. Значит, количество покрашенных в один из цветов точек на прямой не менее 2016.

Критерии: Полное решение – 14 баллов. Доказано, что покрашенных точек не менее 6047 — 8 баллов. Приведен пример для 6047 покрашенных точек — 4 балла. Доказано, что из 6047 покрашенных точек хотя бы 2016 покрашены в один цвет — 2 балла.

5. Решить уравнение:

$$x+\frac{7}{x}=[x]+\frac{7}{[x]},$$

где $x=[x]+\{x\}$.

Решение. После эквивалентных преобразований придем к уравнению

$$(x-[x])(1-\frac{7}{x[x]})=0,$$

что равносильно совокупности уравнений $x-[x]=0$ и $[x]=\frac{7}{x}$. Решением первого уравнения будут все отличные от нуля целые числа. Во втором уравнении целую часть числа выразим как $[x]=x-\{x\}$, откуда $\{x\}=x-\frac{7}{x}$, из которого следует, что $0<x-\frac{7}{x}<1$ при $[x]\neq 0$. Решениями двойного неравенства являются $x\in[-\sqrt{7};\frac{1-\sqrt{29}}{2})\cup[\sqrt{7};\frac{1+\sqrt{29}}{2})$, и, следовательно, $[x]\in\{-3;2;3\}$. Теперь из уравнения $[x]=\frac{7}{x}$ находим $x=-\frac{7}{3}$; $x=\frac{7}{2}$; $x=\frac{7}{3}$. Из полученных значений x выберем те, которые принадлежат промежуткам $[-\sqrt{7};\frac{1-\sqrt{29}}{2})\cup[\sqrt{7};\frac{1+\sqrt{29}}{2})$. Значит $x=-\frac{7}{3}$.

Ответ: $x\in Z$ и $x=-\frac{7}{3}$.

Критерии: Полное решение – 7 баллов; получены два лишних корня – 5 баллов; указано множество целых чисел – 3 балла.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ окружность описанная около треугольника COD (O – точка пересечения диагоналей) проходит через центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Решение. Пусть O_1 – центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Из условия следует, что $\angle COD=\angle CO_1D=\smile CD$. С другой стороны, $\angle COD=\dfrac{\smile AB+\smile CD}{2}$. Из двух равенств получаем, что $\smile AB=\smile CD$. Следовательно $BC||AD$, что и требовалось доказать.

Критерий: Полное решение – 15 баллов; доказательства нет, но есть продвижения в верном направлении – до 7 баллов.

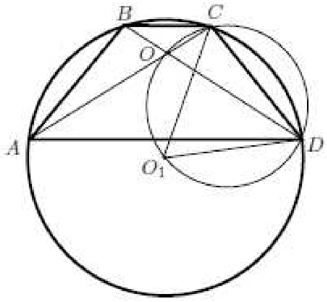

Рис. 1:

7. Существуют ли 2016 последовательных натуральных чисел, среди которых есть ровно 16 простых чисел?

Решение. Введем функцию $S(n)$, равную количеству простых чисел от n до $n+2015$. Заметим, что $S(n)$ отличается от $S(n+1)$ не более, чем на 1. $S(2017!+2)=0$, $S(1)>16$ $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, ...$ - простые числа). Следовательно, существует число m такое, что $S(m)=16$. Т.е. среди чисел от m до $m+2015$ ровно 16 простых чисел.

Ответ: Да, существуют.

Критерии: Полное решение – 15 баллов; если не показано, что среди первых 2015 чисел простых чисел более 16 – 13 баллов; за правильный ответ без решения – 0 баллов.