9 класс

Задача 1. Решите уравнение $x^4+12x^2=8+6x^4$.

Решение	Критерии
При помощи равносильных преобразований, приводим данное уравнение к неполному квадратному уравнению: $x^4+12x^2=8+6x^4 \Leftrightarrow x^6-6x^4+12x^2-8=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^3=0 \Leftrightarrow x^2-2$ Последнее уравнение имеет два корня: $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2}.$ Ответ. $x=\pm\sqrt{2}.$	1. Верное решение — 7 баллов; 2. Только верный ответ — 2 балла.

Задача 2. Через секунду после запуска программы GeomS на мониторе компьютера вначале появляется случайное число a_1 затем, в каждую секунду последовательно появляются числа $a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...$ где n– число секунд, прошедших после запуска программы. Оказалось, что независимо от того, какие числа появляются первым и вторым на мониторе, для любых трех членов $a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}$ последовательности, всегда выполняется равенство $3a_n=a_{n+1}+2a_{n-1}$. Какое число появится на мониторе через 11 секунд после запуска программы, если известно, что первым на мониторе появилось число –31(минус тридцать один), а вторым –29(минус двадцать девять)?

Решение	Критерии
Заметим, что равенство $3a_n \quad a_{n+1} \quad 2a_{n-1}$ равносильно условию $a_{n+1} \quad a_n \quad 2 \; a_n \quad a_{n-1}$. Следовательно: $a_n=a_1+2+4+\cdots+2^{n-1},\ a_{11}=-31+2+4+\cdots+2^{10}=2015.$ Ответ.2015	1. Верное решение — 7 баллов. 2. последовательно верно найдены все члены последовательности вплоть до 11-го члена — 7 баллов. 3. первые члены последовательности найдены правильно, но ответ неверный — 3 балла. 4. только правильный ответ — 1 балл

Задача 3. О вписанном пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $CD=DE,\ BC \parallel AE,$ $\angle BCD=135°,\ \angle CDE=150°.$ Найдите BE, если известно, что радиус описанной окружности равен 1.

Решение	Критерии
$BE=\sqrt{3}.$ Так как по условию $BC\|\|AE$, то $AB=CE$, то есть четырехугольник $ABCE$– равнобедренная трапеция (см. рис.). Из равнобедренного треугольника CDE ($CD=DE$ по условию задачи) находим, $\angle DCE=\angle DEC=15°.$ Следовательно $\angle ABC=\angle BCE=120°,\ \angle EAB=\angle CEA=60°.$ Из теоремы синусов для треугольника ABE: $\frac{BE}{\sin\angle EAB}=2R\Leftrightarrow\frac{BE}{\sin 60°}=2\Leftrightarrow BE=\sqrt{3}.$	1.Верное решение — 7 баллов. 2. Ход решения правильный, но в результате арифметической ошибки получен неверный ответ — 5 баллов. 3. Получен правильный ответ при неверном предположении, что$AB=BC$— 3 балла.

Задача 4. Квадратный трехчлен с целыми коэффициентами ax^2+bx+c имеет целые корни, произведение которых равно 2015, а неравенство $ax^2+bx+c<0$ имеет ровно 33 целых решения. Зная, что $a>0,\ b<0,$ определите корни квадратного трехчлена

Решение	Критерии
$x_1=31,\ x_2=65.$ Пусть x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена. По теореме Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0,\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=2015.$ Следовательно x_1 и x_1 целые положительные числа, произведение которых равно 2015. Кроме того, между этими числами должно поместиться еще 33 целых числа. Заметим, что число 2015 можно разложить в произведение двух положительных целых чисел (не учитывая порядка сомножителей) только одним из четырех способов. Как видим, есть только одна парасомножителей, между которыми помещается ровно 33 целых числа: 31 и 65.	1. Верное решение — 7 баллов;. 2. Из-за того, что не учтена положительность корней получено два ответа— 4 балла.

Задача 5. На столе находятся 10 стопок игральных карт (количество карт в стопках может быть разным, пустых стопок не должно быть).Общее число карт на столе 2015. Если в стопке четное количество карт, убираем половину карт, если количество оставшихся встопке карт опять четно, то опять убираем половину, и так, пока число карт в стопке не станет нечетным. И так поступаем с каждой стопкой. Объяснить:
а) Каково наибольшее возможное число карт, остающихся на столе?
б) Каково наименьшее возможное число карт, остающихся на столе?

В каждом из случаев показать пример разложения игральных карт по стопкам.

Решение	Критерии
а) Так как 2014 – число нечетное, то при любой раскладке карт на 10 стопок найдется хотя бы одна стопка с четным количеством карт.Следовательно количество карт этой стопки, а значит и общее количество карт обязательно уменьшится как минимум на одну карту (если в этой стопке 2 карты). То есть окончательное количество карт на столе всегда будет меньше 2015. При раскладке $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{8}, 2, 2005,$ как легко проверить, окончательное число карт, остающихся на столе – 2014. б) Наименьшее количество карт остающихся в стопке – 1. Следовательно окончательное число карт, остающихся на столе не может быть меньше 10. В следующем примере окончательное число карт, остающихся на столе, равно 10: $1024, 512, 256, 128, 64, 16, 8, 4, 2, 1.$	1. Верное решение — 7 баллов. А) Оценка и пример — 3 балла; только пример — 2 балла; только верный ответ — 1 балл. Б) Оценка и пример — 4 балла; только пример — 3 балла; только верный ответ — 1 балл.