8 класс

Задача 1. Найдите натуральные числа a иb, если известно, что число $\overline{abba}$является полным кубом.

Решение	Критерии
Заметим, что число $\overline{abba}$ делится на 11 (по признаку делимости на 11). Так как, 22^3=10648 — пятизначное число, то $\overline{abba} = 11^3 = 1331$. **Ответ:** a=1, b=3	За правильный ответ – 5 баллов. Если доказано, что $\overline{abba}$ делится на 11 — +1балл. Если доказано, что кроме a=1, b=3 больше решений нет — +2 балла. Если задача решена методом перебора — 1-7 баллов в зависимости от количества перебранных чисел.

Задача 2. После олимпиады по математике пятеро ребят заметили, что любые двое из них решили в сумме не более 9 задач. Каким может быть самое большее количество задач, решенных всеми ребятами?

Решение	Критерии
Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5– количество задач решенных ребятами. Заметим, что не более 1 ребенка могло решить более 4 задач, иначе нашлись бы двое которые решили больше 9 задач. Не умаляя общности, можно считать, что a_1, a_2, a_3не более 4. Тогда $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \leq 4+4+4+(a_4+a_5) \leq 4+4+4+9=21$. Приведем пример: 4,4,4,4,5. В этом примере выполняются все условия задачи и сумма чисел равна 21.	1. За правильный ответ — 1 балл. 2. За правильный ответ с примером — 3 балла. 3. За правильное решение без примера — 5 баллов. 4. За правильное решение с неправильным примером — 0 баллов. 5. Если задача решена методом перебора — 1-7 баллов в зависимости от количества перебранных чисел.

Задача 3. Отличники Алёша и Вася выписывают четырёхзначные числа. Алёша выписывает такие числа, у которых первая цифра равна произведению трёх других, а Вася такие, у которых последняя цифра равна произведению трёх других. Кто выпишет больше чисел и на сколько?

Решение	Критерии
Так как Вася может писать числа, которые оканчиваются на 0, а Алеша не может писать числа, которые начинаются на 0, то Вася выпишет больше чисел. Подсчитаем количество четырехзначных чисел, которые заканчивается на 0 и содержат в своей записи еще хотя бы один 0. На первом месте такого четырехзначного числа может стоять любая цифра от 1 до 9. Ноль должен стоять на втором или третьем месте. Количество чисел вида 0правно 9, количество чисел вида n0 равно 9 (где n>0), и еще есть 00. Значит количество всех искомых чисел равно	1. За правильный ответ — 1 балл. 2. Если объяснено почему Вася напишет больше чисел — +1 балл. 3. Получен неправильный ответ из-за того, что 00 подсчитали два раза — 2 балла.

9×(9+9+1)=171.	

Задача 4. На прямой отмечены отрезок KL и 15 точек, лежащих вне отрезка KL. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки K не может быть равна сумме расстояний до точки L.

Решение	Критерии
Обозначим отмеченные точки через $A_1, A_2, \ldots A_{15}$. Предположим, что сумма расстояний от этих точек до точки K равна сумме расстояний до точки L. $A_1K+A_2K+\ldots+A_{15}K= A_1L+A_2L+\ldots+A_{15}L$. Перенесемвсевлевуючасть $(A_1K-A_1L)++(A_2K- A_2L) +\ldots+(A_{15}K- A_{15}L) = 0$. Заметим, что каждая скобка равна либо KLлибо $–KL$. А так как скобок 15 штук, то их сумма не может быть равна 0.	1. Если написано, что $A_iK-A_iL=KL$— 3 балла.

Задача 5. У правильного 2015-угольника покрашено 807 вершин. Докажите, что найдутся три покрашенные вершины, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника?

Решение	Критерии
Известно, чтолюбые три вершины правильного пятиугольника являются вершинами равнобедренного треугольника. В правильном 2015-угольнике разобьем все вершины на 403 групп по пять вершин, расположенных через 402 последовательных вершин. Точки в каждой группе являются вершинами правильного пятиугольника. Покрашенных вершин всего $807 = 2\cdot403+ 1$, следовательно, в какой-то из групп вершин покрашено не менее трех. Но любые три вершины правильного пятиугольника лежат в вершинах равнобедренного треугольника.	1. Замечено, что любые три вершины правильного пятиугольника являются вершинами равнобедренного треугольника — 5 баллов.