10 класс

Задача 1. Делится ли число $22^4 - 3^8$ на 2015?

Решение	Критерии
$22\ \ -3\ \ =22\ \ -9\ \ =(22\ \ -9\ \ )(22\ \ +9\ \ )=$ $(22-9)(22+9)(22\ \ +9\ \ )=13\times 31\times$ $(484+81)=13\times 31\times 565.$ Т.к. $2015=13\times$ 31×5, то данное выражение делится на 2015. **Ответ:** Да, делится.	Только за ответ – 0 баллов. Если доказано, что данное выражение делится на 5 (13,31) – 2 балла.

Задача 2. Коля записал в тетради несколько последовательных натуральных чисел. Известно, что 50,4% из них нечетные. Сколько чётных чисел записал Вася?

Решение	Критерии
Так как записанные натуральные числа являются последовательными, то чётные и нечётные числа чередуются. По условию нечётных чисел больше, значит, записанная последовательность начинается и заканчивается нечётными числами. Нечётных чисел больше на одно, значит, одно число составляет $(50{,}4 - 49{,}6)\%$ от их общего количества. Следовательно, искомое количество чётных чисел равно $49{,}6 \div (50{,}4 - 49{,}6) = 62$. **Ответ**: 62	Только правильный ответ – 1 балл. Найдено количество нечетных чисел – 5 баллов.

Задача 3. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(100)$, если $f(0{,}2) = 2$и $f(0{,}5) = 5$.

Решение	Критерии
Заметим, что$f(x\cdot 1) = f(x) + f(1), или\ f(1) = 0$.Тогда $f(1) = f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.Т.е.$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$. Следовательно, $f(100) = f(10\cdot 10) = f(10) + f(10) = \big(f(2)+f(5)\big) + \big(f(2)+f(5)\big) = 2\big(f(2)+f(5)\big) = 2\left(-f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{5}\right)\right) = -2\big(f(0{,}5)+f(0{,}2)\big) = -2(2+5) = -14.$ **Ответ:**$f(100) = -14$	За правильный ответ – 1 балл. Если доказано, что$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ – 3 балла. За правильное решение с арифметической ошибкой – 6 баллов.

Задача 4. Можно ли все диагонали правильного 2015-угольника раскрасить в 2012 цветов так, чтобы все диагонали, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

Решение	Критерии
Рассмотрим диагонали цвета 1. Заметим, что каждая диагональ соединяет две вершины. А так как вершин 2015 – нечетное число, и из каждой вершины выходит одна диагональ цвета 1, то будет существовать вершина из которой не будет выходить диагональ цвета 1. **Ответ.** Нельзя.	За правильный ответ – 5 баллов.

Задача 5. Решить уравнение

$x^5 - [x] = 5$, где $[x]$ –целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

Решение	Критерии
Перепишем уравнение в таком виде $-(x - \{x\}) = 5$.($\{x\}$ –дробная часть числа x). Получим $x^5 - x = 5 - \{x\}$. Т.к.$0 \leq \{x\} < 1$, то $4 < x^5 - x \leq 5$.Заметим, что $x^5 - x = x(x^4 - 1) \geq 2(2^4 - 1) = 30$ при $x \geq 2$; и $x^5 - x = x(x^4 - 1) \leq 0$ при $x \leq -1$.Следовательно xдолжно лежать в интервале от -1 до 2. Значит $[x]$ может равняться только $-1, 0$ *или* 1. Соответственно получаем уравнения$x^5 + 1 = 5, x^5 = 5, x^5 - 1 = 5$. Их решения:$x = \sqrt[5]{4},\ x = \sqrt[5]{5},\ x = \sqrt[5]{6}$.Их целые части равны 1. Следовательно, ответом является только число $x = \sqrt[5]{6}$. **Ответ:**$x = \sqrt[5]{6}$	За правильный ответ – 1 балл. Решение проведено методом перебора, но рассмотрены не все варианты – 2-6 баллов. Решение правильное, но содержит арифметические ошибки – 6 баллов

Задача 6. В прямоугольнике $ABCD$диагональACв два раза длиннее стороныAB. ТочкаE, лежащая вне прямоугольника $ABCD$, такая, что угол $\angle CED = 120°$. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник CED лежит на прямой OE, где O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$.

Решение	Критерии
В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза АС в два раза длиннее катета АВ. Тогда угол $\angle ACB = 30°$. Следовательно, $\angle COD = 60°$ и треугольник OCD – равносторонний. Тогда четырехугольник $OCED$ вписан в окружность, так как сумма углов $\angle COD$ и $\angle CED$ равна $180°$. Получается, что углы $\angle OEC$ и $\angle OED$ равны, так как опираются на одинаковые дуги. Таким образом OE – биссектриса угла $\angle CED$, то есть центр вписанной окружности лежит на прямой OE.	Доказано, что треугольник OCD равносторонний – 3 баллов. Доказано, что четырехугольник $OCED$ вписанный – 5 баллов.

Задача 7. На окружности расположены 25 непересекающихся дуг, и на каждой из них написаны два произвольныхпростых числа. Сумма чисел каждой дуги не меньше произведение чисел дуги, следующей за ней по часовой стрелке. Чему может равняться сумма всех чисел?

Решение	Критерии
Обозначим написанные числа через $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{25}, b_{25})$. Заметим, что если $a_i b_i \geq a_i + b_i$, если a_i и b_i– простые числа, так как простые числа не меньше 2. Теперь выпишем условие задачи $a_1 + b_1 \geq a_2 b_2 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 b_3 \geq a_3 + b_3 \geq \cdots \geq a_1 + b_1$. Т.е. неравенство выполняется только в случае равенства. Таким образом, $a_i b_i = a_i + b_i$ для всех i. Это равенство выполняется только в случае, если $a_i = b_i = 2$. Значит все числа, написанные на окружности равны 2. Следовательно, сумма чисел равна $2 \times 2 \times 25 = 100$. **Ответ:** 100.	Только правильный ответ – 1 балл. Замечено, что произведение двух простых чисел не меньше их суммы – 3 балла.