

10 класс. Заключительный этап Вариант 1

Задача 1. В Якутии в сельской местности запасают на зиму чистую питьевую воду в виде льда. При осенней заготовке льда оказалось, что две полыньи на озере отделены друг от друга на 100 м. Толщина льда $h=0,5$ м. Перед двумя друзьями Аялом и Аяном возникла проблема перетащить небольшой кусок льда из одной полыньи в другую. Аян предложил поднять кусок и протащить по льду сверху, а Аял утопить его и протащить под ледяным покровом. В каком случае будет совершена минимальная работа и во сколько раз меньше? Плотность льда $\rho_l=900$ кг/м³, воды – $\rho_v=1000$ кг/м³. Коэффициент трения льда $\mu=0,01$.

Решение

Из условия плавания льда определяем δ - часть высоты льда над уровнем воды (рис.1):

$$\rho_l Shg = \rho_v Sg(h - \delta) \Rightarrow \delta = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} h = 0,1h$$
, (1)

где S – площадь льдины

При вытаскивании льдины из воды сила изменяется от 0 до mg . При этом нижняя поверхность льдины поднимается на высоту $h - \delta$ (рис.1). Для расчета силы берем среднее значение $F/2=mg/2$. Работа при подъеме будет

$$A_{\text{под}} = mg \frac{0,9h}{2} + mg \cdot 0,1h = 0,55mgh$$
. (2)

Первая часть определяет работу при подъеме льда в воде, а вторая часть – над водой на высоту δ .

При погружении льда в воду сила изменяется от 0 до величины $(\rho_v - \rho_l)Vg = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_l} mg = \frac{1}{9} mg$. Работа, совершенная при погружении

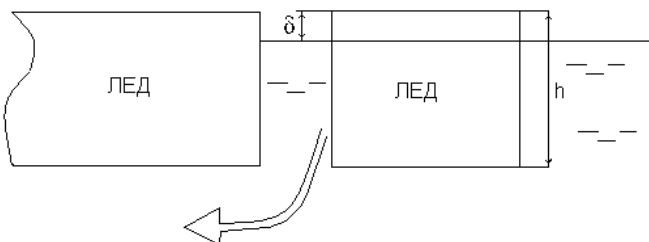
$$A_{\text{погр}} = \frac{mgh \cdot 0,1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{9} 0,9mgh = 0,11mgh$$
. (3)

Первая часть этой работы соответствует погружению надводной части, а вторая – подводной (см. рис.1).

Работа по перетаскиванию льда сверху $A_1 = \mu mgl$, снизу $A_2 = \mu \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_l} mgl = \frac{1}{9} \mu mgl$.

Отношение работ будет:

$$\frac{A_{\text{сверху}}}{A_{\text{снизу}}} = \frac{A_{\text{под}} + A_1}{A_{\text{погр}} + A_2} = \frac{0,55mgh + \mu mgl}{0,1mgl + \frac{1}{9}\mu mgl} \approx 7,5 \quad (4)$$



№	Критерии оценивания	баллы
1	Определена высота δ	2 б
2	Установлено, что для расчета работы при поднятии льдины нужно брать среднее значение силы	4 б
3	Рассчитана работа по поднятию льдины из воды	4б
4	Рассчитана работа по погружению льдины в воду	4б
5	Определена работа по перетаскиванию льда над поверхностью	1б
6	Определена работа по перетаскиванию льда под поверхностью	1б
7	Получена формула (4)	2 б
8	Правильный численный результат	1б
9	Сделан вывод о том, что при перетаскивании под водой будет затрачено меньше работы	1 б

Задача 2. Из тонкого провода сопротивлением $R=10$ Ом изготовили квадратную рамку со стороной $a=10$ см. Рамку поместили в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки и по модулю равен $B=1,0$ Тл. К вершинам двух соседних углов рамки подключили источник с малым внутренним сопротивлением и ЭДС $E=3$ В. Найти силу, действующую на рамку со стороны магнитного поля.

Решение

Пусть источник ЭДС к вершинам AD рамки ABCD (рис. 2).

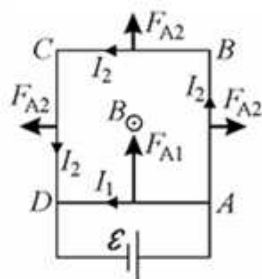
В этом случае сторона AD подключена параллельно к участку ABCD. Силы токов на этих участках будут:

$$I_1=4E/R, \quad I_2=4E/3R$$

На рисунке 2 показаны силы, действующие на стороны рамки со стороны магнитного поля. Силы, действующие на стороны CD и AB, уравновешивают друг друга, а на стороны AD и CB – складываются $F=F_1+F_2$. По закону Ампера

$$F_1=I_1aB, \quad F_2=I_2aB$$

Тогда $F= I_1aB+I_2aB=16aB E/(3R)=0,16$ Н.



№	Критерии оценивания	баллы
1	Сделан рисунок с указанием направлений действующих сил, индукции магнитного поля и токов.	5 б
2	Правильно записаны формулы для токов	4 б
3	Определено, что силы, действующие на стороны CD и AB, уравновешивают друг друга.	2б
4	Определено, что силы, действующие на стороны AD и CB складываются	2б
5	Правильно записаны выражения для сил	4б

6	Записано формула для результирующей силы	26
7	Получен правильный численный результат	16

Задача 3. На потолке комнаты высотой $L = 3,0$ м расположен плоский матовый светильник, имеющий форму прямоугольника размерами $c \times b$, $c = 2$ см, $b = 8$ см. Под светильником на высоте h над полом горизонтально расположили непрозрачную квадратную пластинку со стороной a (см. рис.1).

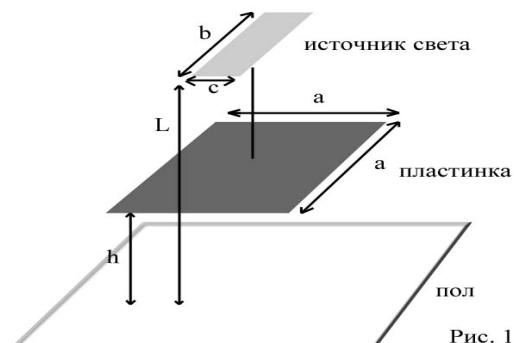


Рис. 1

На рис. 2 схематически изображен вид тени, отбрасываемой пластинкой на пол комнаты: тень состоит из темного прямоугольника, окруженного другим более светлым прямоугольником, причем при приближении к краям этого внешнего прямоугольника тень светлеет. Цена деления шкал на этом рисунке 1,0 см. Определите размер пластинки a и высоту h над полом, на которой расположена пластинка. Укажите ориентацию источника света по отношению к тени, отбрасываемой пластинкой.

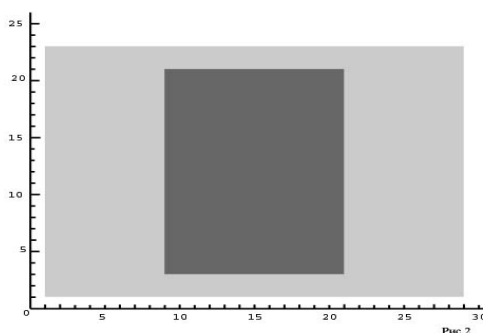


Рис. 2

Решение:

Описанная в условии задачи форма тени объясняется возникновением полной тени (темный прямоугольник) и полутени (внешний более светлый прямоугольник). На рис. 1 показан ход крайних лучей, образующих тень C_1C_2 и полутень (C_1D_1 и C_2D_2) в сечении перпендикулярном одной из сторон источника. Обозначим ширину полной тени $C_1C_2 - x_1$ а ширину полутени $D_1D_2 - x_2$. Эти величины могут быть выражены через геометрические размеры источника и пластинки.

Из подобия треугольников $A_2B_2B_1$ и $A_2D_1C_2$ следует

$$(x_1 + x_2)/2a = L/(L-h) \quad (1)$$

Из подобия треугольников $A_1A_2B_2$ и $B_2C_2D_2$

$$(x_2 - x_1)/2b = h/(L-h) = L/(L-h) - 1 \quad (2)$$

По рисунку теней определяем требуемые размеры:

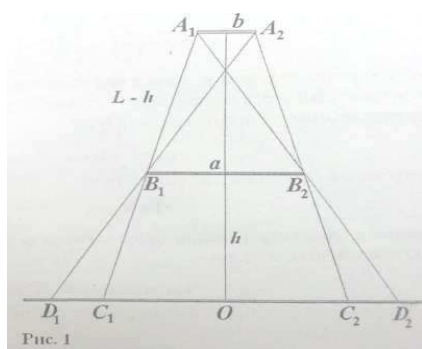


Рис. 1

$$x_1 = 12 \text{ см}, x_2 = 28 \text{ см}.$$

С помощью формулы (2) находим

$$L/(L-h) = 2$$

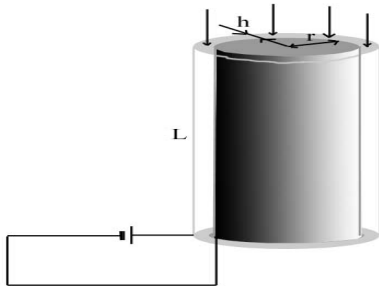
Отсюда находим $h = L/2 = 1,5$ м. Из формулы (1) определяем размер пластинки $a = 10$ см.

Из полученных результатов следует, что длинная сторона источника расположена горизонтально (если использовать рис.2 из условия задачи)

№	Критерии оценивания	баллы
1	Рисунок хода лучей, поясняющих возникновение тени и полутени	4
2	Геометрические соотношения между размерами источника, положением и размером пластинки и размерами тени и полутени	4
3	Расчет высоты пластинки над полом (с численным значением)	4
4	Расчет размеров пластинки (с численными значениями)	4
5	Ориентация источника относительно тени	4

Задача 4. Электрический нагреватель воды состоит из двух coaxial хорошо проводящих цилиндров длиной L . Радиус внутреннего цилиндра равен r , расстояние между цилиндрами значительно меньше радиусов цилиндров и равно h . Цилиндры подключены к источнику постоянного напряжения U_0 . Между цилиндрами медленно протекает вода, которая нагревается благодаря протекающему через нее электрическому току. Рассчитайте, насколько повысилась температура воды, если известна скорость потока воды.

Характеристики воды: плотность γ , удельное электрическое сопротивление ρ , удельная теплоемкость c . Теплоемкостями цилиндров и потерями теплоты в окружающую среду можно пренебречь.



Решение.

Выделим тонкий слой воды толщиной z , перпендикулярный оси системы. Этот слой воды пройдет через нагреватель за время $\tau=L/v$, где v — известная скорость течения. Вода будет нагреваться за счет теплоты, выделяющейся при прохождении электрического тока. Это количество теплоты определяется по закону Джоуля-Ленца

$$Q=U^2 \tau/R \quad (1)$$

Здесь R — электрическое сопротивление выделенного слоя воды.

Учитывая, что электрический ток протекает перпендикулярно поверхностям цилиндров, это сопротивление равно

$$R=\rho h/2\pi r z \quad (2)$$

Вся выделяющаяся в слое теплота идет на ее нагревание, поэтому может быть определена по формуле $Q=cm\Delta t$. Масса выделенного слоя равна $m = V\gamma=2\pi r z h \gamma$. Уравнение теплового баланса имеет вид

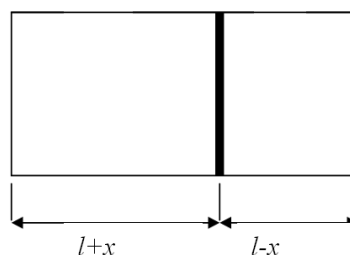
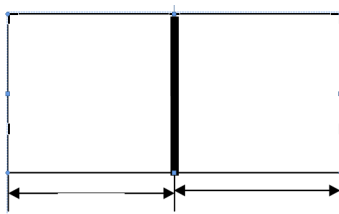
$$\frac{U^2}{\rho} \frac{L}{2\pi r z} = c 2\pi r z h \gamma \Delta t \quad (3)$$

Из этого уравнения находим

$$\Delta t = \frac{U^2 L}{\rho h^2 c \gamma v}$$

№	Критерии оценивания	баллы
1	Закон Джоуля-Ленца	3
2	Сопротивление слоя воды	6
3	Теплота на нагревание	4
4	Уравнение теплового баланса	4
5	Окончательная формула	3

Задача 5. Найти период малых колебаний поршня массой $m=50$ г, разделяющего закрытый горизонтальный цилиндрический сосуд сечением $S=100$ см² на две равные части длиной $l=20$ см каждая. По обе стороны от поршня находится воздух при давлении $P_0=100$ Па. Трения нет. Температуру считать постоянной.



Решение.

Если поршень сместить, например,

вправо от положения равновесия, то воздух справа будет сжать, а слева – расширится. Если теперь поршень отпустить, то он начнет двигаться влево, по инерции «проскочить» положение равновесия и сожмет воздух в левой части сосуда. Теперь ситуация изменится на противоположную – поршень станет двигаться вправо, и т.д., т.е. поршень будет совершать колебания.

Запишем уравнения состояния воздуха в обеих частях сосуда в положении равновесия поршня и в положении, когда поршень смещен вправо на произвольную величину x (см. Рис):

$$p_0Sl = \nu_1RT, \quad p_0Sl = \nu_2RT, \quad (1) \quad p_1S(l-x) = \nu_2RT, \quad p_2S(l+x) = \nu_1RT, \quad (2)$$

В новом положении поршня возникнет разность давлений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\nu_2RT}{S(l-x)} - \frac{\nu_1RT}{S(l+x)} \quad (3)$$

и на поршень будет действовать результирующая сила

$$F = \Delta pS = \frac{\nu_2RT}{(l-x)} - \frac{\nu_1RT}{(l+x)}, \quad (4)$$

направленная к положению равновесия.

Выражение для силы F можно представить в виде:

$$F = \frac{p_0Sl}{(l-x)} - \frac{p_0Sl}{(l+x)} = \frac{2xp_0Sl}{l^2 - x^2} \approx \frac{2xp_0S}{l}, \quad (5)$$

где учтено, что рассматриваются малые колебания поршня ($x \ll l$).

Так как $F \sim x$, то колебания поршня будут гармоническими. В этом случае проекцию силы F на ось x и период колебаний поршня можно представить через коэффициент k возвращающей силы:

$$-\frac{2xp_0S}{l} = -kx, \quad (6) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7) \quad \text{Следовательно, } T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2p_0S}} \approx 0,44 \text{ с.}$$

	Критерии оценивания	баллы
1.	уравнения состояния воздуха в обеих частях сосуда в положении равновесия	2
2.	уравнения состояния воздуха в обеих частях сосуда в положении, когда поршень смещен вправо на произвольную величину x	2
3.	Вывод разности давлений из уравнения Клапейрона-Менделлева (3)	4
4.	Найдена результирующая сила (4)	2
5.	Получена формула (5)	2
6.	Записана формула (6)	4
7.	Записано выражение для амплитуды колебаний(7)	2
8.	Результат	2