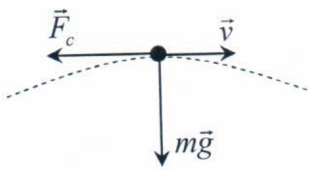
Решение
Заданий заключительного тура олимпиады «Паруса надежды»
2014-2015 у.г.

1 вариант

1. Тело массой m, брошенное под углом к горизонту, имеет в верхней точке траектории ускорение $a = 4g/3$ (g - ускорение свободного падения). Определить силу сопротивления воздуха в этой точке.



Решение. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, которая в верхней точке направлена горизонтально (противоположно скорости). Поэтому из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c$$

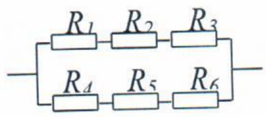
получаем

$$ma = \sqrt{(mg)^2 + F_c^2}$$

где $a = 4g/3$ - ускорение тела. Отсюда находим

$$F_c = \frac{\sqrt{7}}{3}mg$$

2. На каком из сопротивлений в схеме, представленной на рисунке, выделяется наибольшая мощность? $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом. Найти эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.



Решение. Поскольку через сопротивления R_1, R_2 и R_3 течет одинаковый ток, из закона Джоуля-Ленца

$$P = I^2 R$$

следует, что среди этих сопротивлений наибольшая тепловая мощность будет выделяться на сопротивлении R_3. Аналогично среди сопротивлений R_4, R_5 и R_6 наибольшая мощность будет выделяться на сопротивлении R_6.

Сравним мощности тока на сопротивлениях R_3 и R_6. По закону Ома для участка цепи найдем силу тока в верхнем и нижнем участке цепи

$$I_в = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad I_н = \frac{U}{R_4 + R_5 + R_6}$$

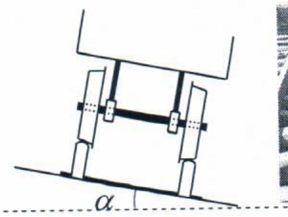
где U - напряжение, приложенное к цепи, а затем по закону Джоуля-Ленца – мощности, выделяемые на сопротивлениях R_3 и R_6:

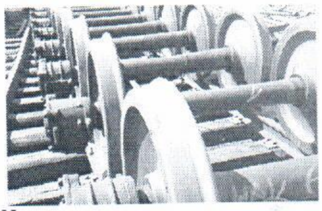
$$P_3 = \frac{U^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} = \frac{3U^2}{36}\ (Вт) \qquad P_6 = \frac{U^2 R_6}{(R_4 + R_5 + R_6)^2} = \frac{6U^2}{225}\ (Вт) \qquad (*)$$

Поскольку $P_3 > P_6$ (приблизительно в три раза), из формулы (*) заключаем, что наибольшая мощность в приведенной схеме будет выделяться на сопротивлении R_3. При $U = 100$ В вычисления по первой из формул (*) дают

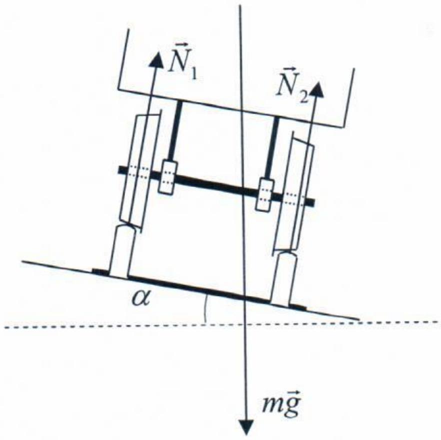
$$P_3 = 833 \ (Bm)$$

3. При поворотах железнодорожных составов для минимизации давления реборды колес на рельсы рельсовое полотно наклоняют в сторону центра поворота (см. рисунок). Оценить, на сколько нужно поднять внешний рельс на повороте с радиусом $R = 800$ м при средней скорости прохождения $v = 70$ км/ч. На какой рельс – наружный или внутренний по отношению к повороту - колеса оказывают большее воздействие? Какова максимальная скорость прохождения такого поворота, при которой поезд не перевернется? Расстояние между рельсами $l = 1{,}5$ м, высота центра тяжести вагона над рельсовым полотном - $h = 2$ м. (Ребордой называется гребень на внутренней стороне колеса железнодорожного вагона, обеспечивающий устойчивость его нахождения на рельсах; см. фото).





Решение. Угол наклона рельсового полотна должен быть таким, что при прохождении поворота с данной в условии скоростью v центростремительная сила создается только силами реакции рельсов (а сила со стороны реборды колес равна нулю).



На поезд действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции рельсов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Второй закон Ньютона дает

$$(N_1 + N_2)\cos\alpha - mg = 0$$

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR} = 0{,}05 .$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha$ мал, то $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому высота Δx, на которую нужно поднять внешний рельс по отношению к внутреннему, равна

$$\Delta x = l \operatorname{tg}\alpha = \frac{lv^2}{gR} = 7{,}5 \text{ см}$$

На какой рельс – наружный или внутренний – поезд оказывает большее воздействие, определяется скоростью прохождения поворота. При той скорости, для которой вычислялся наклон полотна, эти силы одинаковы. Если скорость прохождения поворота больше, сила воздействия на внешний рельс больше чем на внутренний. Если скорость меньше, - на внутренний.

4. Имеется два сосуда, соединенных жесткой трубкой: один объемом $V_1 = 5$ л с жесткими стенками, второй объемом $V_2 = 1$ л - из практически нерастяжимого, но мягкого материала (например, пластиковая бутылка). В сосудах находится неизменное количество горячего воздуха. Воздух в сосудах медленно охлаждают, измеряя его давление. До температуры воздуха, равной $t_0 = 50°$ С, давление в сосудах убывало, а начиная с этой температуры перестало изменяться. Однако, начиная с некоторой температуры, давление снова стало убывать. Объяснить этот опыт и найти температуру, начиная с которой давление снова стало убывать.

Решение. Для объяснения этого опыта нужно предположить, что первоначальное давление в сосудах превосходило атмосферное. Тогда при охлаждении воздуха с ним происходит изохорический процесс, пока давление больше атмосферного – объем бутылки и сосуда не меняется, а с уменьшением температуры уменьшается давление воздуха в сосудах. Когда давление перестало меняться при уменьшении температуры, стал меняться объем сосудов. Это значит, что начиная с температуры $t = 50°$ С должен уменьшаться объем. Это можно объяснить, если допустить, что давление газа в сосудах достигло атмосферного, и бутылка начинает сминаться под действием атмосферного давления. И давление будет оставаться равным атмосферному, пока бутылка полностью не сомнется. Давление снова начнет уменьшаться, когда не сможет уменьшаться объем. Это значит, что при той температуре, которую нужно найти бутылка полностью смялась, т.е. суммарный объем сосудов стал равен 5 л. Напишем формулы, отвечающие этой схеме охлаждения.

От температуры $t = 50°$ до неизвестной температуры t_1 с газом происходит изобарический процесс. Поэтому

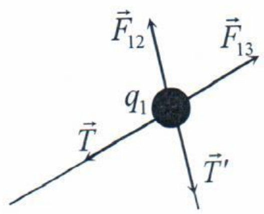
$$\frac{V_1 + V_2}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}$$

где $T_0 = 273 + 50$ К и T_1 – абсолютные температуры, отвечающие началу и концу изобарического процесс. Отсюда находим $T_1 = 269$ К или $t_1 = -4°$ С.

5. На гибкую замкнутую непроводящую нить длиной l нанизаны три бусинки с зарядами одного знака q_1, q_2 и q_3, которые могут без трения скользить по нити. Бусинки отпускают, и они приходят в состояние равновесия. Найти силу натяжения нити. Ответ обосновать.

Решение. Благодаря кулоновскому отталкиванию бусинки натянут нить и расположатся в вершинах некоторого треугольника. Поскольку заряды бусинок разные по величине, положение равновесия бусинок будет достигаться при различных расстояниях между ними. Поэтому треугольник, в который растянется нить, будет неправильным (см. рисунок).

Рассмотрим условия равновесия бусинки с зарядом q_1. На нее действуют силы отталкивания от зарядов q_2 и q_3 (силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{13}$ соответственно). Кроме того, на бусинку действует сила со стороны нити, которая равна сумме сил натяжения нити $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ в тех точках, где пропадает контакт между нитью и бусинкой (по аналогии с силой, действующей на блок со стороны переброшенной через него нити). Эти силы, действующие на бусинку с зарядом q_1, показаны на рисунке. Условие равновесия бусинки имеет вид



$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\vec{T}+\vec{T}'=0 \qquad (*)$$

Очевидно, силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{T}'$ направлены вдоль одной и той же прямой (соединяющей заряды q_1 и q_2), силы $\vec{F}_{13}$ и $\vec{T}$ - также вдоль одной и той же, но другой по сравнению с первой, прямой (соединяющей заряды q_1 и q_3). Поэтому, проецируя уравнение (*) на оси, перпендикулярные сначала одной, а затем другой прямой, получим

$$\left|\vec{F}_{12}\right|=\left|\vec{T}'\right| \qquad \left|\vec{F}_{13}\right|=\left|\vec{T}\right| \qquad (**)$$

А поскольку величины сил натяжения участков нити между зарядами q_1 и q_2 и между зарядами q_1 и q_3 одинаковы (это одна и та же нить), из формулы (**) заключаем, что $F_{12}=F_{13}$. Аналогично доказываем, что $F_{12}=F_{23}$. Таким образом в равновесии бусинки занимают такое положение на нити, что силы их взаимодействия одинаковы (и равны силе натяжения нити). Поэтому с использованием закона Кулона получаем

$$F_{12}=T=\frac{kq_1q_2}{l_{12}^2} \qquad F_{13}=T=\frac{kq_1q_3}{l_{13}^2} \qquad F_{23}=T=\frac{kq_2q_3}{l_{23}^2} \qquad (***)$$

где $k=\left(4\pi\varepsilon_0\right)^{-1}$ - постоянная в законе Кулона, l_{12}, l_{13} и l_{23} - расстояния между бусинками q_1 и q_2, q_1 и q_3 и q_2 и q_3. Выражая из формул (***) величины l_{12}, l_{13} и l_{23} и учитывая, что их сумма равна длине нити, получим

$$l=\sqrt{\frac{kq_1q_2}{T}}+\sqrt{\frac{kq_1q_3}{T}}+\sqrt{\frac{kq_2q_3}{T}} \qquad (4*)$$

Из формулы (4*) находим

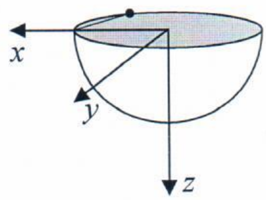
$$T=\frac{k\left(\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_1q_3}+\sqrt{q_2q_3}\right)^2}{l^2}$$

(здесь можно на два варианта «размножить» так: в одном варианте дать заряды q, $2q$ и $3q$, а в другом - q, $2q$ и $4q$ (или какие-то другие); а общее решение (для любых зарядов) дано выше).

6. На краю полусферической чаши радиуса R закреплена невесомая нить длиной $R/2$, ко второму концу которой прикреплено маленькое тело. Тело удерживают на краю чаши так, что нить натянута (см. рисунок). В некоторый момент времени тело отпускают. Найти скорость и ускорение тела в тот момент, когда оно будет проходить нижнюю точку своей траектории.

Решение. Ясно, что траектория тела – окружность, расположенная в вертикальной плоскости. Действительно, все точки траектории лежат с одной стороны на поверхности сферы, с другой - на расстоянии $R/2$ от точки крепления нити, и, следовательно, траектория тела есть сечение чаши вертикальной плоскостью.

Это же утверждение можно доказать и строго математически. Точки траектории лежат на поверхности сферы, поэтому



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

С другой стороны, все эти точки находятся на расстоянии $R/2$ от точки с координатами $(R,0,0)$. Поэтому

$$(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2/4$$

Вычитая эти равенства друг из друга, находим

$$x = \frac{7R}{8}$$

Это и означает, что x – координата тела при его движении остается постоянной – тело движется в плоскости, перпендикулярной оси x. Отсюда находим радиус окружности, по которой движется тело

$$r = \sqrt{R^2 - (7R/8)^2} = \frac{\sqrt{15}R}{8}$$

Скорость тела в нижней точке находим из закона сохранения энергии

$$\frac{mg\sqrt{15}R}{8} = \frac{mv^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\sqrt{\sqrt{15}gR}}{2}$$

Поскольку тело движется по окружности, то его ускорение в нижней точке является центростремительным и равно

$$a = \frac{v^2}{r} = 2g$$

Ответы для второго варианта находятся аналогично.