



Лёвин Б.А.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Очный тур 2018 год.

Вариант 1

1. Дан отрезок длины 7. С помощью циркуля и линейки (без делений) построить отрезок $\sqrt{7}$.

2. Найти функцию, удовлетворяющую данному уравнению:

$$f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2.$$

3. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющих неравенству $\log_2(2x - 2y + 3z - 3) + \log_2(4z - x - 3y) + \log_2(5y - x - 7z + 6) > y^2 - 4y$.

4. Решить неравенство:

$$\frac{|x-1| - 1}{(1-x^2)(3^x - 27)} \geq 0.$$

5. Доказать, что $\sin^2 \alpha \cos^6 \alpha \leq \frac{27}{256}$.

6. Внутри правильного тетраэдра со стороной $\frac{10}{\sqrt{6}-1}$ лежат четыре равных шара. Каждый шар касается трех других шаров, а также граней исходного тетраэдра. Найти радиус указанных шаров.

7. Найти корни уравнения

$$x^2 + x = 1111111122222222.$$

8. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \text{ имеет единственное решение.}$$



Утверждаю:

Ректор РУТ

Лёвин Б.А.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Очный тур 2018 год.

Вариант 2

1. Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки (без делений) построить отрезок длины 2.

2. Найти функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} f(2x + 2) + 2\varphi(4x + 7) = x - 1 \\ f(x - 1) + \varphi(2x + 1) = 2x. \end{cases}$$

3. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющие неравенству:

$$\lg(2x + 3y - 2z - 3) + \lg(4x - y - 4z + 7) + \lg(6z - 2y - 6x - 1) > 6z^2 - 47z + 77.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{(2^{x^2-2x} - 8)(|3 + 2x| - |x - 2|)}{|x^2 - 1| - 3} > 0.$$

5. Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ $\frac{\cos x}{(\sin^2 x)(\cos x - \sin x)} > 8$.

6. Внутри прямого кругового цилиндра находятся три сферы радиуса 1, касающихся друг друга и обоих оснований цилиндра. Найти объем цилиндра.

7. Не пользуясь калькулятором, решить уравнение: $x^2 - x = 1111122222$.

8. При каком значении параметра a , сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?



Утверждаю:

Ректор РУТ

Лёвин Б.А.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Очный тур 2018 год.

Вариант 3

1. С помощью циркуля и линейки построить треугольник по заданным отрезкам медианы, биссектрисы и высоты проведенным из одной вершины.
2. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую заданному уравнению $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$.
3. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющие неравенству $\log_3(x-y+3z-1) + \log_3(2x+2y-2z-3) + \log_3(7-3x-y-z) > x^2+x-6$.
4. Решить неравенство:

$$\frac{(4^x - 16)(|x^2 - 3x| - 2)}{|2x - 3| - |x + 1|} \geq 0.$$

5. Что больше $4\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}9^\circ$ или $3\operatorname{tg}6^\circ\operatorname{tg}10^\circ$? Ответ обосновать.
6. Внутри сферы S находятся четыре сферы радиуса 1, касающихся друг друга и сферы S . Найти радиус сферы S .
7. Найти корни уравнения $x^2 + x = 11111111112222222222$.
8. Найти все значения параметра a , $a > 1$, для каждого из которых график функции $y = a^x$ касается прямой $y = x$.



Лёвин Б.А.

Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Очный тур 2018 год.

Вариант 4

1. На координатной плоскости Oxy нарисовали график параболы $y = x^2$. Потом оси координат стерли – осталась одна парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат?

2. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех $x \neq 0$ равенству:

$$f(x) + 5xf\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^3.$$

3. Найти все тройки целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющие неравенству:

$$\log_5(2x + y - 3z - 3) + \log_5(x - 2y - 4z - 1) + \log_5(y + 7z - 3x + 7) > z^2 - 9z + 18.$$

4. Решить неравенство:

$$\frac{(2^x - 4)(|x^2 - 2x| - 3)}{|3 - x| - |x + 1|} \geq 0.$$

5. Доказать, что если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) > 5$.

6. Внутри куба с ребром a расположены два равных шара, касающихся между собой. При этом один из шаров касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найти радиусы этих шаров.

7. Найти корни уравнения: $x^2 + x = 111111222222$.

8. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$