



Утверждаю:

Ректор МГУПС

Лёвин Б.А

Заочный тур математической олимпиады
«Паруса надежды» МГУПС 2017 год

11 класс
Вариант 1

1. Решить неравенство, указав в ответе количество конечных интервалов, для которых верно данное неравенство:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} + \frac{1}{5+x} - \frac{1}{6+x} + \frac{1}{7+x} > 0.$$

2. Решить систему в действительных числах, в ответе указать сумму всех решений (x, y, z)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = (x + y - z)^2 + 2 \\ x^3 + y^3 - z^3 = (x + y - z)^3 + 9 \\ x^4 + y^4 - z^4 = (x + y - z)^4 + 29 \end{cases}$$

3. Найти номер наибольшего члена последовательности $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ $n \in \mathbb{N}$.

4. Решить уравнение $\sqrt{2x - x^2} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 2 - \sqrt{x + 2}$.

5. Решить уравнение $|x^2 - 1| + |x^2 - 5x + 6| - 5x + 7 = 0$.

В ответе указать длину интервала, на котором верно данное равенство.

6. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

В ответе укажите сумму длин всех интервалов, на которых верно данное неравенство.

7. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором уравнение

$$\frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} = a$$
 имеет на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ хотя бы одно решение.

8. Найдите величину угла, под которым пересекаются окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 9. \end{cases}$$
 Ответ предоставить в градусах.

9. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $OC = AB$. Найдите в градусах угол при вершине C .



Утверждаю:

Ректор МГУПС

Лёвин Б.А.

Заочный тур математической олимпиады «Паруса Надежды» МГУПС 2017 год.

11 класс

Вариант 2

1. Найдите в градусах угол C треугольника ABC , если расстояние от вершины C до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

2. Решить неравенство

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} < 1.$$

В ответе указать сумму длин конечных интервалов, где выполняется данное неравенство.

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-8}} - \frac{1}{\sqrt{x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-6}} - \frac{1}{\sqrt{x-5}} - \frac{1}{\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} < 0.$$

В ответе указать количество непересекающихся интервалов, на которых верно данное неравенство.

4. Решить систему:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = -4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$
 В ответе записать сумму (x, y, z) всех

полученных решений системы.

5. Известно, что уравнение $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ имеет четыре положительных корня. Найти a и b . В ответе записать их сумму.

6. Решить уравнение $|x^2 - 4| + |x^2 + 7x + 12| = 16 + 7x$. В ответе указать сумму длин конечных интервалов, для которых верно данное равенство.

7. Сколько цифр содержит число 2^{100} ?

8. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2 - x - x^2} = \sqrt{x} - 1$.

9. Точки A, B, C находятся на трех ребрах куба, сходящихся в его вершине O . $AO = OB = OC = 2$, ребро куба равно 8. Через точки A и B , принадлежащие одной из граней куба, проведена пара плоскостей, перпендикулярных этой грани и параллельных диагонали Oo' куба. Аналогично проведена пара плоскостей через точки B и C и через точки C и A . В результате три пары параллельных плоскостей отсекают часть куба. Какой объем этого многогранника?