Утверждаю:
Ректор МИИТа проф. Лёвин Б.А.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Очный тур Олимпиады по математике «Паруса Надежды» 2017год
11 класс

Вариант 1

1. Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 гр. Можно ли за 10 взвешиваний отвесить покупателю 1 кг сахару? Ответ должен быть обоснован.

2. Сколько цифр содержится в десятичной записи числа 20^{20} ?

3. Найдите площадь области на плоскости хОу, ограниченной системой неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{y-x}{|x+2y|}\right| \geq 2; \\ \left|y-\dfrac{3}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

4. Решить в натуральных числах уравнение $x^3+8x^2+42x+27=y^3$.

5. Вини Пух заготовил некоторое количество горшочков с медом, представляющее собой двузначное число. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 11. Сколько горшочков с медом заготовил Вини Пух?

6. Расстояния от некоторой точки прямоугольника ***ABCD*** до вершин ***A, B, C*** равны соответственно 4, 5, 3. Найдите площадь прямоугольника.

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + 2\sin(x+y+z)=0; \\ \sin y + 3\sin(x+y+z)=0; \\ \sin z + 4\sin(x+y+z)=0. \end{cases}$

8. Найдите все значения параметра ***a***, при которых система имеет единственное решение. Укажите это решение. $\begin{cases} |x| + \log_2(4y+a^2)=3; \\ \log_a(x^2+1)+y^2=1. \end{cases}$

Утверждаю:
Ректор МИИТа проф. Лёвин Б.А.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Очный тур Олимпиады по математике «Паруса Надежды» 2017год
11 класс

Вариант 2

1. Из восьми монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь?

2. Дано число 2^{1995}. Найти последнюю цифру этого числа.

3. Найдите площадь области на плоскости xOy, ограниченной системой неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{\frac{x}{2}+y}{x-\frac{y}{2}}\right| \le 1; \\ |y-3| \le 1 \end{cases}$.

4. Решить в простых числах уравнение $3x^4 - 5y^4 - 4z^2 = 26$.

5. Аня и Лена могут прополоть весь огород вместе за 5 часов. Если бы после 2-х часов совместной работы Аня ушла домой, то Лене пришлось бы работать 7 часов, чтобы выполнить всю работу. Сколько времени потребовалось бы Ане, чтобы самостоятельно прополоть весь огород?

6. Расстояния от некоторой точки прямоугольника $ABCD$ до вершин A, B, C равны соответственно 5, 13, 12. Найдите площадь прямоугольника.

7. Решить уравнение $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение. Укажите это решение. $\begin{cases} |x| + \log_a(y^2+1) = 2; \\ \log_2(x+a) + 2|y| = 2. \end{cases}$

Утверждаю:
Ректор МИИТа проф. Лёвин Б.А.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Очный тур Олимпиады по математике «Паруса Надежды» 2017год
11 класс

Вариант 3

1. Среди семи монет имеются две фальшивые (более легкие монеты). Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь выделить обе фальшивые монеты? Ответ должен быть обоснован.

2. Сколько цифр содержится в десятичной записи числа 20^{30} ?

3. Найдите площадь области на плоскости xOy, ограниченной системой неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x-y}{2x+2y}\right| \geq 1; \\ |y-2| \leq 1 \end{cases}$.

4. Решить в простых числах уравнение $x^2+y^2+16z^2=82$.

5. Хозяйка купила четыре фунта риса три фунта постного сахара и шесть фунтов рафинада. Если бы постный сахар стоил в полтора раза дороже, а рафинада было куплено в два раза больше, то покупка обошлась бы в 6 фунтов стерлингов. Если бы риса было куплено в три раза больше, а постный сахар стоил бы в два раза дороже, то покупка обошлась бы в 8 фунтов стерлингов. Сколько стоила покупка на самом деле?

6. Расстояния от некоторой точки прямоугольника $ABCD$ до вершин A, B, C равны соответственно 6, 10, 8. Найдите площадь прямоугольника.

7. Решить уравнение $tg^3x+tg^3 2x+tg^3 3x=(tgx+tg2x+tg3x)^3$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение. Укажите это решение. $\begin{cases} |x-2a| \leq 5; \\ \log_2(x+a) \leq 2. \end{cases}$

Утверждаю:
Ректор МИИТа проф. Лёвин Б.А.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Очный тур Олимпиады по математике «Паруса Надежды» 2017год
11 класс

Вариант 4

1. Имеется 5 гирь. Их массы равны 1000г, 1001г, 1002г, 1004г и 1007г, но надписей на гирях нет и внешне они неотличимы. Имеются весы со стрелкой, которые показывают массу в граммах. Можно ли за 3 взвешивания определить гирю в 1000 г? Ответ должен быть обоснован.

2. Найти остаток от деления на 7 числа 2^{1995}.

3. Найдите площадь области на плоскости xOy, ограниченной системой неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{y-3x}{x+2y}\right| \geq 1; \\ |y-3| \leq 1 \end{cases}$.

4. Решить в целых числах уравнение $x^2+2x = y^4 + y^2$.

5. В полдень из дома Кристофера Робина вышел Вини Пух и пошел к себе домой. Через час за ним пустился Тигра и догнал Пуха как раз около его дома. Если бы Пух вышел из своего дома, а Тигра одновременно с ним из дома Кристофера Робина навстречу друг другу, то встреча произошла бы через 40 минут. Сколько времени Пух шел к себе домой?

6. Расстояния от некоторой точки прямоугольника $ABCD$ до вершин A, B, C равны соответственно 3, 6, $3\sqrt{3}$. Найдите площадь прямоугольника.

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x + 2\cos(x+y+z) = 0; \\ \cos y + 3\cos(x+y+z) = 0; \\ -\cos z + 4\cos(x+y+z) = 0. \end{cases}$

8. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение. Укажите это решение. $\begin{cases} |a-x| \leq 2; \\ \log_3(2x+a) \leq 1. \end{cases}$