Олимпиада по математике «Паруса надежды»

Заочный тур 2017 год

Для школьников 9 класс

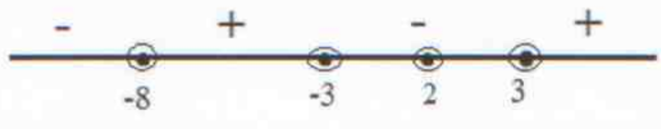
Решение.

1. Имеем $S(n) \le 9*4 = 36 \Rightarrow n \ge 1964 - 36 = 1928 \Rightarrow n = 1900 + 10k + l$, где $2 \le k \le 9$ $0 \le l \le 9; 1900 + 10k + l + 10 + k + l = 1964, 11k + 2l = 54, 2 \le 2l \le 18, 36 \le 11k \le 54$

   $3\frac{3}{11} \le k \le 4\frac{10}{11} \Rightarrow k = 4, l = 5, n = 1945$. Ответ: $\{1945\}$.
2. $\cos 20^o + \cos 40^o + \cos 60^o + \cos 80^o + \cos 100^o + \cos 120^o + \cos 140^o + \cos 160^o + \cos 180^o = \cos 20 + \cos 40 + \frac{1}{2} + \sin 10^o - \sin 10^o - \frac{1}{2} - \cos 40^o - 1 - \cos 20 = -1$

   Ответ: $\{-1\}$.
3. Пусть v_1, v_2 – скорости первого и второго пешеходов, S – расстояние от A до B, x – расстояние, которое осталось пройти второму пешеходу, когда первый закончит переход. Из условия задачи получим систему $\frac{S}{2}\frac{v_2}{v_1} + 24 = S, \frac{S}{2}\frac{v_1}{v_2} + 15 = S$. Обозначив $\frac{v_1}{v_2} = u$ и деля второе уравнение на первое, получим, что $8u^2 - 6u - 5 = 0 \Rightarrow u = \frac{5}{4} \Rightarrow S = 40$км. Поскольку $S\frac{v_2}{v_1} + x = S$, то $x = 8$ км. Ответ: 8 км.
4. Пусть $\frac{m}{n}$ – искомая несократимая дробь, m,n – однозначные числа. По условию имеем $n = m^2 - 1, \frac{m+2}{n+2} > \frac{1}{3} \Rightarrow 3m + 6 > m^2 + 1, m^2 - 3m - 5 < 0$, тогда $\frac{3-\sqrt{29}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < m < \frac{3+5.4}{2} \Rightarrow 0 < m < 4.2$. Поэтому $m \in \{1,2,3,4\}$. Тогда $m = 1$ не подходит т.к. $n = 0$; аналогично не подходит $m = 4$, т.к. $n = 15$ – двухзначное число. Проверяем $m = 2$, тогда $n = 3$ и дробь будет $\frac{2}{3}$, что невозможно по условию. Остается $m = 3$, тогда $n = 8$. Дробь $\frac{3}{8}$ удовлетворяет всем условиям задачи. Ответ: $\{38\}$.
5. $$\frac{(|x^2-2|-7)(|x^2-2|+7)(|x+3|-5)(|x+3|+5)}{(|x-3|-|x-1|)(|x-3|+|x-1|)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left((x^2-2)^2-49\right)\left((x+3)^2-25\right)}{(x-3)^2-(x-1)^2} > 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2-7)(x^2-2+7)(x+3-5)(x+3+5)}{(x-3-x+1)(x-3+x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+8)}{(-2)(2x-4)} > 0,$$
   $$x \ne 2 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x+8) < 0$$

   . Решаем методом интервалов:



   Отсюда решение: $x < -8;\ -3 < x < 3; x \ne 2$. А тогда ответ:$\{1\}$
6. Пусть длина третьей стороны равна m. По неравенству треугольника имеем: $3{,}14 - 0{,}67 < m < 3{,}14 + 0{,}67 \Leftrightarrow 2{,}47 < m < 3{,}81$. Так как по условию m – целое число, то $m = 3$. Ответ: $\{3\}$.

7. $x(x+y)+x+y=5+xy(x+y); x(x+y)+x+y-xy(x+y)=5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+y)(x-xy+1)=5$. Так как x, y – целые числа, то равенство возможно лишь, когда $\begin{cases} x+y=5 \\ x-xy+1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=-5 \\ x-xy+1=-1. \end{cases}$ Для первой системы находим, что $\begin{cases} x+y=5 \\ x(1-y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, y=5 \\ x=4, y=1 \end{cases}$ Для второй системы получим:
$\begin{cases} y=-5-x \\ x^2+5x+x+2=0 \quad x^2+6x+2=0 \end{cases}$ Это уравнение целых решений не имеет.

Далее решаем системы: 3) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x=xy+1=-5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-xy+1=5. \end{cases}$

Для 3) $\begin{cases} x=-1-y \\ x(1-y)=-6 \end{cases} \Rightarrow$ Система не имеет целых решений.

Для 4) $\begin{cases} x=1-y \\ x(1-y)=4 \end{cases}$ $(1-y)^2=4 \Rightarrow y=-2$ или $y=3$ А тогда $x=2, x=-2.$

Ответ: $\{4\}$.