

1 вариант.

1. Покажем, что потребуется всего 10 взвешиваний. Последовательно отвешивается: 1, 2, 4, 8, 16 грамм (при этом уже взвешенный сахар каждый раз пересыпается на чашку с гирей); гиря снимается, отвешивается 31 гр.; гиря кладется и сахар пересыпается, отвешивается 63 гр.; гиря окончательно снимается и последовательно отвешивается 125 гр., 250 гр., 500 гр. Ссыпав вместе весь сахар, получаем 1 кг. Ответ: можно.

2.  $20^{20} = 10^{20} * 2^{20} = 10^{20} * 1024^2 = 10^{20} * 1048576$ , поэтому число цифр равно 27. Ответ: {27}.

3. Данная система будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} |x-y| \geq 2|x+2y| \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \geq 4(x+2y)^2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(5y+x) \leq 0 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\text{I} \begin{cases} x+y \geq 0 \\ 5y+x \leq 0 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x+y \leq 0 \\ 5y+x \geq 0 \end{cases}$$

А тогда, нарисовав на плоскости  $xOy$  прямые  $y = -x$  и  $y = -\frac{x}{5}$ , найдем, с учетом неравенства  $1 \leq y \leq 2$ , что площадь области, это площадь трапеции  $ABCD$ , где точки – вершины имеют координаты  $A(-5; 1)$ ,  $B(-10; 2)$ ,  $C(-2; 2)$ ,  $D(-1; 1)$ . Отсюда находим, что  $S=6$ .

Ответ: {6}.

4. Заметим, что  $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 <$   
 $< x^3 + 8x^2 + 42x + 27 < x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x+4)^3$

Поэтому  
 $y = x + 3;$

$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 8x^2 + 42x + 27;$$

$$x^2 = 15x; \quad x = 15$$

Ответ:  $(x;y)=(15;18)$ .

5. Пусть искомое число равно  $10a+b$ . Получим систему

$$\begin{cases} 10a + b = 7a + 7b + 6; \\ 10a + b = 3ab + 11 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b + 2; \\ 2b^2 - 5b - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3; \\ a = 8. \end{cases}$$

Ответ. 83.

6. Расстояния от любой точки  $M$  прямоугольника  $ABCD$  до его вершин обладают свойством  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Откуда следует, что точка  $M$  совпадает с точкой  $D$ , и площадь прямоугольника равна  $MA \cdot MB = 3 \cdot 4 = 12$ .

2 вариант.

1. На каждую чашку кладем по 3 монеты, две откладываем. Если одна чашка легче другой, берем 2 монеты с этой чашки и сравниваем. Если одна легче другой, то это и есть фальшивая. Если чашки в равновесии, то фальшивая третья монета. Если при первом взвешивании чашки были в равновесии, то фальшивая монета - среди двух отложенных. Сравниваем их при втором взвешивании и определяем фальшивую монету.

2.  $2^{1995} = 2^{4 \cdot 498 + 3} = 16^{498} \cdot 8$ . Поскольку 16 в любой натуральной степени заканчивается на 6, а  $6 \cdot 8 = 48$ , то последняя цифра числа  $2^{1995}$  будет 8.  
Ответ: {8}.

3. Система будет равносильна:

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{2} + y \right| \leq \left| x - \frac{y}{3} \right| \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left( \frac{x}{2} + y \right)^2 \leq \left( x - \frac{y}{3} \right)^2 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left( -\frac{x}{2} + \frac{4y}{3} \right) \left( \frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} \right) \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left( y - \frac{3x}{8} \right) \left( y + \frac{9x}{4} \right) \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Строим на плоскости прямые  $y = \frac{3x}{8}$  и  $y = -\frac{9x}{4}$ . Тогда площадь искомой области, будет площадью трапеции с вершинами  $A\left(\frac{16}{3}; 2\right), B\left(-\frac{8}{9}; 2\right),$

$C\left(-\frac{16}{9}; 4\right), D\left(\frac{32}{3}; 4\right)$ . Тогда площадь трапеции будет равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \left( \frac{56}{9} + \frac{112}{9} \right) = \frac{168}{9} = \frac{56}{3}. \text{ Ответ: } \frac{56}{3}.$$

4. Рассматривая остаток от деления на 3, получаем, что  $y^4 + 2z^2$  даёт в остатке 2. Если  $y$  не делится на 3, то первое слагаемое даёт в остатке 1 и в сумме со вторым не получается в остатке 2. Противоречие. Поэтому  $y$  делится на 3, то есть  $y=3$ .

Рассматривая остаток от деления на 5, получим, что число  $3x^4 + z^2$  даёт в остатке 1. Если первое слагаемое не делится на 5, то оно даёт в остатке от деления на 5 число 3. Второе слагаемое - 0,1 или 4. В сумме не получается остаток 1. Поэтому  $x$  делится на 5, то есть  $x=5$ .

Подставляя в исходное уравнение, находим  $z=19$ .

Ответ:  $(x;y;z)=(5;3;19)$ .

5. Пусть Ане требуется  $x$  часов, что бы самостоятельно прополоть огород, а Лене  $y$  часов. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}; \\ \frac{2}{x} + \frac{9}{y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{x} = \frac{4}{5}; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \quad x = 35/4 = 8 \text{ часов } 45 \text{ минут.}$$

6. Расстояния от любой точки  $M$  прямоугольника  $ABCD$  до его вершин обладают свойством  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Откуда следует, что точка  $M$  совпадает с точкой  $D$ , и площадь прямоугольника равна  $MA \cdot MB = 5 \cdot 12 = 60$

3 вариант.

1. Покажем, что трех взвешиваний достаточно. Положим на весы 6 монет, по 3 на каждую чашку. Если весы уравнились, то одна фальшивая находится на одной чашке весов, вторая – на другой. Но тогда, чтобы выделить по фальшивой монете из каждой тройки, достаточно двух взвешиваний. Если же при первом взвешивании одна чашка перевесила, то на ней монеты настоящие, тогда нам нужно выделить две фальшивые монеты из остальных четырех монет с помощью двух взвешиваний. Ответ: можно.

2.

$$20^{30} = 2^{30} * 10^{30} = (2^{10})^3 * 10^{30} = 1024^3 * 10^{30} = 1048576 * 1024 * 10^{30} = \\ = 1048576 * (1000 + 24) * 10^{30} = (1048576000 + 1048576 * 24) * 10^{30}.$$

Так как в числе 1048576000 число цифр равно 10, а в числе  $1048576 * 20$  число цифр равно 8, то ответ 40. Ответ: {40}.

3. Система равносильна:

$$\begin{cases} |x - y| \geq |2x + 2y| \\ -1 \leq y - 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 \geq (2x + 2y)^2 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3y)(y + 3x) \leq 0 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \text{I} \begin{cases} x + 3y \geq 0 \\ y + 3x \leq 0 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} x + 3y \leq 0 \\ y + 3x \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда получим область  $\begin{cases} y \geq -\frac{x}{3} \\ y \leq -3x \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$ . Это будет трапеция  $ABCD$ , где

координаты точек соответственно будут:  $A(-9; 3)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(-3; 1)$ ,  $D(-1/3; 1)$ .

А тогда площадь трапеции  $S = \frac{1}{2} \cdot 2(8 + \frac{8}{3}) = \frac{32}{3}$ . Ответ:  $\frac{32}{3}$ .

4. Рассматривая остаток от деления на 3, получаем, что  $x^2 + y^2 + z^2$  даёт в остатке 1. Так как квадрат натурального числа может давать в остатке только 0 или 1, получаем, что два из трёх чисел делятся на 3, то есть равны 3. Если это первые два, то  $z=2$ . Если же  $z=3$ , то решения нет.

Ответ:  $(x; y; z) = (3; 3; 2)$ .

5. Пусть фунт риса стоил  $x$  монет, фунт постного сахара стоил  $y$  монет, а фунт рафинада  $z$  монет. Получим систему:

$$\begin{cases} 4x + \frac{9}{2}y + 12z = 6; \\ 12x + 6y + 6z = 8 \end{cases} \quad \text{Вычтем из удвоенного второго уравнения первое и}$$

выразим  $y$  через  $x$ . Получим  $y = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}x$ . Подставим во второе уравнение и

выразим  $z$  через  $x$   $z = \frac{2}{3}x$ . Найдем стоимость покупки:

$$4x + 3y + 6z = 4x + 4 - 8x + 4x = 4.$$

Ответ. 4 фунта стерлингов.

6. Расстояния от любой точки  $M$  прямоугольника  $ABCD$  до его вершин обладают свойством  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Откуда следует, что точка  $M$  совпадает с точкой  $D$ , и площадь прямоугольника равна  $MA \cdot MB = 6 \cdot 8 = 48$ .

4 вариант.

1. Зная массу любых двух гирь, можно легко определить массу каждой гири в отдельности. Поэтому выбираем произвольные две пары гирь и взвешиваем каждую пару. Тем самым мы определяем, есть ли хотя бы в одной из них гиря массой 1000 г. Если есть, то третьим взвешиванием одной из гирь соответствующей пары определяем ее, если нет, то оставшаяся пятая гиря имеет массу 1000 гр. Ответ: можно.

2. Рассмотрим остатки степеней двойки при делении на 7.

а)  $2^1$  при делении на 7 дает остаток 2.

б)  $2^2$  при делении на 7 дает остаток 4.

в)  $2^3$  при делении на 7 дает остаток 1.

Эти остатки повторяются с периодом  $T=3$ , так как  $1995=3 \cdot 665$ , то  $2^{1995}$  при делении на 7 дает остаток 1. Ответ: {1}.

3. Данная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} |y-3x| \geq |2y+x| \\ -1 \leq y-3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y+x)^2 - (y-3x)^2 \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2y+x-y+3x)(2y+x+y-3x) \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+4x)(3y-2x) \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+4x)(y-\frac{2}{3}x) \leq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Строим прямые  $y = -4x$  и  $y = \frac{2}{3}x$ , а затем область, которая будет трапецией с вершинами  $A(3; 2)$ ,  $B(-\frac{1}{2}; 2)$ ,  $C(-1; 4)$ ,  $D(6; 4)$ . Ее площадь равна  $S = \frac{1}{2} \cdot 2(7+3,5) = 10,5$ . Ответ: {10,5}

4. Заметим, что  $(y^2)^2 < (x+1)^2 = y^4 + y^2 + 1 \leq (y^2 + 1)^2$ . Отсюда  $y=0$  и  $x=0$  или  $x=-2$ .

Ответ:  $(x;y)=(0;0)$  или  $(-2;0)$ .

5. Пусть Пух проходит путь до своего дома за  $x$  часов, тогда Тигра проходит этот путь за  $(x-1)$  час. Получим уравнение  $\frac{2}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}) = 1$ . Решая уравнение получим  $x=2$ . Ответ. За 2 часа.

6. Расстояния от любой точки  $M$  прямоугольника  $ABCD$  до его вершин обладают свойством  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Откуда следует, что точка  $M$  совпадает с точкой  $D$ , и площадь прямоугольника равна  $MA \cdot MB = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ .

*Ответы.*

|   | 1 вариант | 2 вариант  | 3 вариант | 4 вариант         |
|---|-----------|------------|-----------|-------------------|
| 1 | можно     | можно      | можно     | можно             |
| 2 | 27        | 8          | 40        | 1                 |
| 3 | 6         | $56/3$     | $32/3$    | 10,5              |
| 4 | (15; 18)  | (5; 3; 19) | (3; 3; 2) | (0; 0)<br>(-2; 0) |
| 5 | 83        | 8ч 45мин   | 4         | 2                 |
| 6 | 12        | 60         | 48        | $9\sqrt{3}$       |