Заочный тур

Математической Олимпиады

«Паруса надежды» 2017

Вариант 1

1. Группируя слагаемые: 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5 получим: $\frac{2x+7}{x(x+7)}-\frac{2x+7}{(x+1)(x+6)}+\frac{2x+7}{(x+2)(x+5)}-\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7x}-\frac{1}{x^2+7x+6}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)>0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$(2x+7)\left(\frac{3}{(x^2+7x)(x^2+7x+6)}+\frac{1}{(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)}\right)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x+7)\frac{(x^2+7x)^2+18(x^2+7x)+90}{(x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)}>0$

Так как $(x^2+7x)^2+18(x^2+7x)+90>0$ для любого $x(\frac{D}{4}=81-90<0)$, то неравенство равносильно неравенству: $x(x+1)(x+2)(x+3)\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)>0$

Решение этого неравенства находим методом интервалов. Это будет множество: $(-7;\,-6)\cup(-5;\,-4)\cup(-\frac{7}{2};\,-3)\cup(-2;\,-1)\cup(0,+\infty)$.

Поэтому ответ: $\{4\}$.

2. Во все три уравнения данной системы переменные x и y входят симметрично поэтому сделаем замену $u=x+y, v=xy, z=z$. Тогда получим систему $\begin{cases} u^2-2v-z^2=(u-z)^2+2 \\ u^3-3uv-z^3=(u-z)^3+9 \\ (u^2-2v)^2-2v^2-z^4=(u-z)^4+29 \end{cases}$

Рассмотрим первые два уравнения этой системы. После преобразования получим систему:

$\begin{cases} z(u-z)=1+v \\ uz(u-z)=3+uv. \end{cases}$ Ясно, что $u\neq 0$. Поэтому умножив первое уравнение на u и вычитая второе, находим, что $u=3$. Рассматривая первое и третье уравнение системы и подставляя $u=3$ поле преобразований, получим систему:

$\begin{cases} z(3-z)=1+v \\ (9-2v)^2-2v^2=[9-2z(3-z)]^2-2z^2(3-z)^2+29 \end{cases}$

Исключая из этой системы выражение $z(3-z)$, получим уравнение $(9-2v)^2-2v^2=[9-2(1+v)]^2-2(1+v)^2+29 \Longrightarrow v=\frac{5}{4}$

Зная u и v находим, что система $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=\frac{5}{4} \end{cases}$ имеет два решения $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right),\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$. Подставляя $u=3, v=\frac{5}{4}$ в первое уравнение системы, находим $z=\frac{3}{2.}$ Таким образом, имеем два решения системы: $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Проверка показывает, что эти наборы есть решение исходной системы. Поэтому ответ: {9}.

3. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ при $x \geq 1$. Найдем ее максимум на $[1;+\infty)$. Имеем $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{lnx}{x}}$. При $x>1$ $f'=\frac{1}{x^2}x^{\frac{1}{x}}(1-lnx)$. Отсюда $f'(x)=0$ при $x=e$. При $1<x<e$ $f'(x)>0$, при $x>e$ $f'(x)<0$. Так как $f(x)$ непрерывна, то $\max f(x)=e^{1/e}$ при $x=e$. С учетом того, что $2<e<3$ и $f(x)$ монотонна на соответствующих интервалах, то для нахождения наибольшего члена последовательности достаточно сравнить по величине только два ее члена: второй и третий, т.е. числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Так как очевидно $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$, то искомым членом последовательности будет: $a_3=\sqrt[3]{3}$. А тогда ответ {3}.

4. Находим ОДЗ: $0 \leq x \leq 2; -2 \leq x \leq -1; x \geq 2 \Rightarrow$ ОДЗ $x=2$.
Подставляем: $x=2$ в уравнение, получим, что $x=2$ корень.
Ответ: {2}.

5. $|x^2-1|+|x^2-5x+6|=5x-7$.
Так как $x^2-1-(x^2-5x+6)=5x-7$, то имеем равенство вида: $|a|+|b|=a-b$, которое верно тогда и только тогда, когда $a \geq 0, b \leq 0$. Отсюда получаем равносильную систему: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2-5x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ или } x \geq 1 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$.
Ответ: {1}.

6. Перейдем к основанию 2, тогда при ОДЗ $x>3$ получим:
$$\log_2(x+3)-\log_2(x-3)-\frac{1}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}-1\right)\left(\log_2\frac{x+3}{x-3}+1\right)}{\log_2\frac{x+3}{x-3}}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x+3}{x-3}-2\right)\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{x+3}{x-3}-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(9-x)(x+9)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

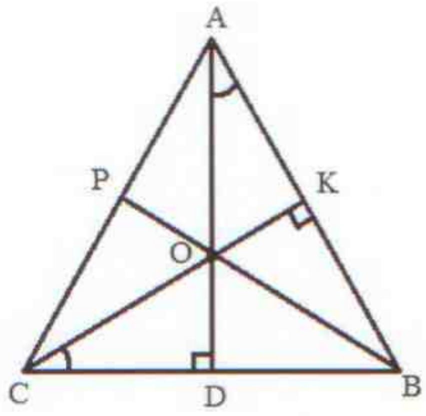
Ответ: $\{6\}$.

7. Так как $y = sinx$ монотонно возрастает на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и принимает все значения из интервала $(0;1)$, то нужно найти наименьшее a, при котором уравнение $\frac{4}{y}+\frac{1}{1-y} = a$ $(sinx = y)$ имеет хотя бы одно решение из интервала $(0;1)$.

   Найдем $\min f(y) = \frac{4}{y}+\frac{1}{1-y}$; $f'_y = -\frac{3y^2-8y+4}{y^2(1-y)^2} == -\frac{3(y-2)\left(y-\frac{2}{3}\right)}{y^2(1-y)^2}$.
   Поэтому $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ $f'(y) > 0$ при $\frac{2}{3} < y < 1$ и
   $f'(y) < 0$ при $0 < y < \frac{2}{3}$. Следовательно $\min f(y) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 9$. Значит, если $a = 9$, то уравнение будет иметь ровно один $y \in (0;1)$ корень $y = \frac{2}{3}$, а если $a < 9$, то корней нет. Ответ: $\{9\}$.

8. Координаты точек пересечения данных окружностей удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-4x = 1 \\ x^2+y^2-2y = 9. \end{cases}$ Решая эту систему, находим пары чисел $(3;2)$и $(1;-2)$. Так как эти точки будут симметричны относительно прямой, проходящей через центры окружностей, то достаточно найти угол между касательными к этим окружностям, проходящим через точку (3;2). В окрестности точки $x = 3$ уравнения функций первой и второй окружности будут $y_1(x) = \sqrt{1+4x-x^2}$, $y_2(x) = 1+\sqrt{10-x^2}$. Находим, что $y_1'(x) = \frac{-x+2}{\sqrt{1+4x-x^2}},$
   $y_2'(x) = -\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}.$ Отсюда $y_1'(3) = -\frac{1}{2}$; $y_2'(3) = -3$. А тогда тангенс искомого угла находится из отношения: $tg\alpha = \left|\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right| = 1$. А тогда $\alpha = 45^0$. Ответ: 45^0.

9. Пусть ABC данный треугольник, O – точка пересечения его высот CK, AD и BD. По условию $OC = AB$. Найти угол C. Строим данный треугольник ABC.

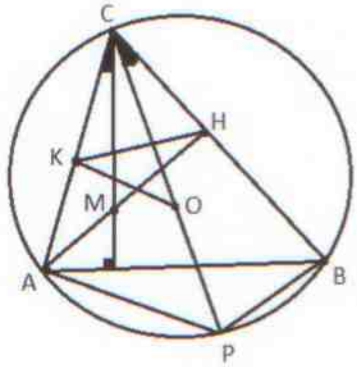


Решение
$\Delta COD = \Delta BDA$ т.к. они прямоугольные и $AB = CO$ (по условию), а $\angle KCD = \angle DAB$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из равенства треугольников следует, что $OD = DB \Rightarrow \angle PBD = 45^o$, а тогда из прямоугольного треугольника PBC следует, что угол $C = 45^0$. Ответ: 45^0.

Заочный тур Паруса надежды 2017 год

Вариант 2

Задача 1.



Пусть O – центр окружности, описанный вокруг ABC, M-ортоцентр, CP – диаметр окружности $CM = CO$ – по условию.

Решение.

Вписанные углы ABC и APC равны, тогда равны также углы MCB и ACO. Пусть K – середина AC, H – основание высоты, опущенной на BC. Медиана KH прямоугольного треугольника ACB равна $\frac{AC}{2} = KC$ – как радиус окружности, описанный около ΔACH. Из равенства прямоугольных треугольников KCO и CHM ($CM = CO$ по условию и $\angle KCO = \angle HCM$ по доказанному) следует, что KC=CH. Следовательно треугольник KCH равносторонний.

Ответ: $\{60^o\}$.

Задача 2.

$$\left(2^x + \frac{3}{2^x}\right)^{\log_2 \frac{x^2}{x+6}} < 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2}{x+6}\right) * \left(2^x + \frac{3}{2^x} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - (x+6)\right)(2^{2x} - 2^x + 3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow (0 < x < 3)$$. Ответ: {3}

Задача 3.

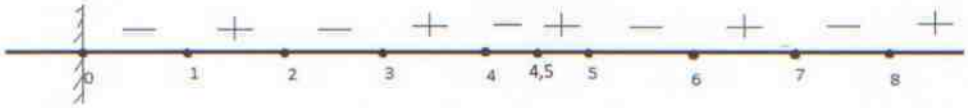
Пусть $\sqrt{x} = t \geq 0$, тогда: $\frac{1}{t-8} - \frac{1}{t-7} + \frac{1}{t-6} - \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-4} + \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} + \frac{1}{t-1} < 0$. Группируя по два соответствующих слагаемых, получим:

$$(2t-9)\left(\frac{1}{t^2-9t+8} - \frac{1}{t^2-9t+14} + \frac{1}{t^2-9t+18} - \frac{1}{t^2-9t+20}\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2t--9)\left(\frac{6}{(t^2-9t+8)(t^2-9t+14)} + \frac{2}{(t^2-9t+18)(t^2-9t+20)}\right) < 0$. Пусть $t^2 - 9t = z$, тогда: $\left(t - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{z^2+34z+298}{(z+8)(z+14)(z+18)(z+20)}\right) < 0$. Так как $z^2 + 34z + 298 > 0$ для любого

$z\left(\frac{D}{4}<0\right)$, то получим, что $\left(t-\frac{9}{2}\right)(t-1)(t-8)(t-2)(t-7)(t-3)(t-6)(t-4)(t-5)<0$.

Решаем методом интервалов:



Значит: $0<\sqrt{x}<1$; $2<\sqrt{x}<3$; $4<\sqrt{x}<4{,}5$; $5<\sqrt{x}<6$; $7<\sqrt{x}<8 \Leftrightarrow 0<x<1$;

$4<x<9; 16<x<20{,}25; 25<x<36; 49<x<64.$

Ответ: $\{5\}$.

Задача 4.

Сделаем замену $x+y=a, xy=b$, тогда: $\begin{cases} a=1-z \\ b+za=-4 \\ a(a^2-3b)=a(1+z+z^2). \end{cases}$ Пусть $a=0$, тогда $z=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\mp 2 \end{cases} \Rightarrow$имеем два решения: $(2;-2;1), (-2;2;1)$.

При $a\neq 0$ получаем: $\begin{cases} a=1-z \\ b=-4-za \\ a^2-3b=1+z+z^2 \end{cases} \Rightarrow$Подставляя a и b в третье уравнение, получим

$z=\pm 2$. Далее имеем две системы: $\begin{cases} z=2 \\ x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} z=-2 \\ x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ Решая каждую из них, получим еще четыре решения: $(-2;1;2), (1;-2;2), (1;2;-2), (2;1;-2)$. А тогда ответ: $\{6\}$.

Задача 5.

Согласно теореме Виета, если x_1, x_2, x_3, x_4 – корни (с учетом кратности) данного уравнения, то $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом, следует, что $1=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\leq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=1$. Отсюда следует, что $\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=1$.

Поскольку равенство между средними достигается тогда и только тогда, когда эти числа равны между собой, то $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ и следовательно $x^4-4x^3+ax^2+bx+1=(x-1)^4$. Отсюда получаем, что $a=6, b=-4$. А тогда ответ $\{2\}$

Задача 6.

Пусть $x^2+7x+12=a, x^2-4=b$, тогда $a-b=7x+16$. Поэтому равенство имеет вид: $|a|+|b|=a-b$. Отсюда следует, что это возможно тогда и только тогда, когда $a\geq 0, b\leq 0$. А тогда получаем: $\begin{cases} x^2+7x+12\geq 0 \\ x^2-4\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$. Ответ: $\{4\}$

Задача 7.

Сравним: $lg2$ и $0{,}3$; $lg2 \vee 0{,}3,$; $2 \vee 10^{0,3}$; $2^{10} \vee 10^3$; $1024 > 1000 \Rightarrow lg2 > 0{,}3$. С другой стороны, $lg2 < 0{,}302$, поэтому $10^{0.3} < 10^{lg2} < 10^{0.302} \Leftrightarrow 10^{30} < 2^{100} < 10^{30} * 10^{0,2}$. Так как 10^{30} имеет 31 разряд и целая часть числа $\sqrt[5]{10} * 10^{30}$ также имеет 31 разряд, то следовательно число 2^{100} имеет 31 разряд. Ответ: $\{31\}$.

Задача 8.

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ 2 - x - x^2 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ или $x = 1$. Проверка показывает, что корнем уравнения является лишь значение $x = 1$. Ответ 1.

Задача 9.

Многогранник, объем которого надо вычислить, имеет двенадцать граней. Шесть (три пары) секущих плоскостей (они все параллельны диагонали куба) образуют правильную шестиугольную призму. Эта призма «усечена» шестью гранями куба. Таким образом, шесть граней – параллелограммы, пара сторон каждого из которых параллельна диагонали куба, а шесть граней квадраты со стороной 2. Наш многогранник состоит из трех косых призм и одного куба. Косая призма имеет квадратные основания со стороной 2 и высотой 6. Ее объем будет равен $2^2 * 6 = 24$. А тогда объем всего многогранника будет равен $3 * 24 + 8 = 80$. Ответ: $\{80\}$.