Олимпиада по математике «Паруса надежды» для школьников 10 классов.

Заочный тур.

Решение.

1. $S = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + 10^{1000} - 1 = 10(1 + 10 + 100 + \dots + 10^{999}) -$
$-100 = 10\frac{10^{1000}-1}{9} - 1000 = \underbrace{111\dots10}_{999\text{ единиц}} - 1000 \Rightarrow$
в числе – 998 единиц. Ответ: $\{998\}$.

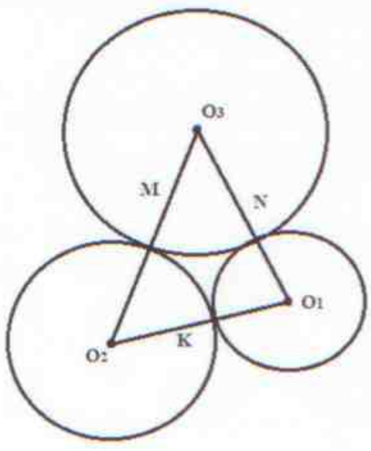
2. Пусть x – число сороконожек, y – число драконов. Тогда $x + 3y + 26; 40x \le 298 \Rightarrow x \le 7$. Так как $26 - x$ делится на 3, то $x = 2$ или $x = 5$. Проверка показывает, что $x = 5$, тогда $y = 7$. Число ног дракона $(298 - 40 * 5) : 7 = 14$. Ответ: $\{14\}$.

3. ОДЗ $4 \le x \le 6$. Найдем максимум функции $f(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4}$
$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{6-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-4}} \Rightarrow f'(x) = 0;\ \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x} \Rightarrow x = 5$. При $x = 5$ $f(x)$ имеет максимум, равный 2. С другой стороны,
$x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \Rightarrow \min\varphi(x) = x^2 - 10x + 27 = 2$ при $x = 5$. А тогда равенство возможно лишь при $x = 5$. Ответ: $\{5\}$.

4. $$\frac{|x^2-3x|-|x^2-2|}{|x^2-x-2|-|x^2-2x|} * \frac{|x^2-3x|+|x^2-2|}{|x^2-x-2|+|x^2-2x|} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-3x)^2-(x^2-2)^2}{(x^2-x-2)^2-(x^2-2x)^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-3x-x^2+2)(x^2-3x+x^2-2)}{(x^2-x-2-x^2+2x)(x^2-x-2+x^2-2x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(2-3x)(2x^2-3x-2)}{(x-2)(2x^2-3x-2)} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x-\frac{2}{3}}{x-2} \le 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \le x < 2$$
. Ответ: $\{1\}$.

5. Очевидно, что $x = 1$ будет решением данного уравнения. Покажем, что других нет. Имеем: $\left(\frac{2017}{2016}\right)^x = 1 + \frac{1}{2016^x};\ \left(\frac{2017}{2016}\right)^x - 1 = \frac{1}{2016^x}$ Отсюда видно, что функция в левой части возрастает, а в правой части убывает. Поэтому уравнение имеет не более одного решения. Ответ: $\{1\}$.

6. Обозначим центры данных окружностей через O_1, O_2, O_3. Пусть K, M, N соответствующие точки касания данных окружностей. Тогда
$O_1K = O_1N = 1, O_2k = O_2M = 2, O_3M = O_3N = 3$.



Покажем, что искомая окружность совпадает с окружностью, вписанной в треугольник O_1, O_2, O_3. Действительно, если вписать в треугольник $O_1O_2O_3$ окружность, то отрезки, соединяющие его вершины с точками касания, будут радиусами соответствующих окружностей.
Пусть r – искомый радиус этой окружности. Запишем площадь треугольника O_1, O_2, O_3 через периметр и r, и через формулу Герона. Приравнивая эти выражения площади, мы

получим: $\frac{1}{2}\mathrm{P}r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где P – периметр, а $p = \frac{\mathrm{P}}{2}$; a, b, c – стороны треугольника O_1, O_2, O_3. Получим:
$\frac{1}{2}r(2+4+6) = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} \Longrightarrow 6r = 6; r = 1$. Ответ: $\{1\}$.

7. Пусть скорость течения реки x км/час, t – время, прошедшее от момента выхода лодки до момента встречи. Тогда по условию: 1) путь, пройденный плотом до встречи, 2) путь, пройденный мотолодкой до встречи, 3) путь, пройденный мотолодкой после встречи, равны друг другу. Отсюда получаем: $(2{,}4+t)x = t(20+x) = (3{,}6-2{,}4-t)(20-x)$. Отсюда находим: $t = \frac{2{,}4}{20}x \Rightarrow x = 4$. Ответ: 4 км/час.