



Утверждаю:  
Ректор университета

Б.А. Лёвин

«    »  
2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Отборочный этап

Вариант 1.

1. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 10 прямых?

2. Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \lg\left(\frac{y}{2x}\right) = 5^{2x} - 5^y \\ 2^{2-y} + 8^{-2x} = 65^x \cdot 4^{\frac{3y}{2}} \end{cases}$$

В ответе указать сумму всех полученных решений  $(x, y)$ .

3. Решить уравнение  $\frac{(x-1)^2 x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{2}{9}$ . В ответе указать произведение всех только целых решений уравнения.

4. Найти сумму длин конечных интервалов, для которых выполняется неравенство

$$\frac{(x^2 - 1 - 8)(x + 1 - 6)(x^2 - 5 - 4)}{(x - 2 - |x|)(x^2 - 5 - 11)} > 0.$$

5. Найти максимальное значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\sqrt{4+2x} + \sqrt{3+x} + \sqrt{1-x} = a\sqrt{2} - \sqrt{-2x}$  имеет решение.

6. Найти наибольшее целое положительное из значений  $x$ , для которого существуют числа  $y$  и  $z$ , удовлетворяющие уравнению:

$$z^2 + zx - zy + y^2 + x^2 - xy - 1 = 0.$$

7. Определить на сколько частей разбивают правильный тетраэдр шесть плоскостей, каждая, из которой проходит через одно из ребер тетраэдра и середину противоположного ребра.

8. У кума Ивана свинья весит в 4 раза больше, чем его младшая дочь Иванка, а старшая дочь Софийка весит лишь на 50 кг меньше, чем та же свинья. Во сколько раз вес свиньи больше веса кума, если общий вес сестер и свиньи лишь на 50 кг меньше, чем 4,5 веса кума Ивана?

9. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:

$$5x^2 + 2y^2 + 2x + 4xy - 4y + 3 = 0$$

В ответе указать количество таких решений.



Утверждаю:

Ректор университета

Б.А. Лёвин

2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Отборочный этап

Вариант 2.

1. На плоскости лежат 200 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найти число всех различных прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.
2. Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \log_6 \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \\ 5^{1-x} + 5^{-2x} = 26^x \cdot 5^{-2y} \end{cases}$$

В ответе указать сумму всех решений  $(x, y)$ .

3. Решить уравнение  $\frac{(x+1)^2 x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{18}{49}$ . В ответе указать наибольшее целое положительное решение.
4. Найти сумму длин конечных интервалов, для которых выполняется неравенство  $\frac{(|x^2 - 3| - 6)(|x + 3| - 1)(|x^2 - 1| - 3)}{(|x - 2| - x)(|x^2 - 2| - 23)} > 0$ .
5. Найти максимальное значение параметра  $a$ , при котором уравнение  $\sqrt{5-x} + \sqrt{8-x} = a - \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$  имеет решение.
6. Найти наименьшее целое отрицательное значение  $z$ , при котором существуют такие числа  $x$  и  $y$ , чтобы имело место равенство:  
 $2y^2 + 2x^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4$ .
7. Найти наибольшее число точек, которые можно расположить на сфере радиуса 1 так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было больше  $\sqrt{2}$ .
8. У кумы Параски свинья весит в три раза больше, чем её младшая дочь Горпина, а старшая дочь Лушка весит на 80 кг меньше, чем та же свинья. Во сколько раз вес кумы меньше веса её свиньи, если общий вес сестёр и свиньи лишь на 80 кг меньше, чем  $\frac{14}{3}$  веса Параски?
9. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:  
 $2x^2 + 5y^2 - 4x - 2y - 4xy + 3 = 0$ . В ответе указать количество таких решений.