Утверждаю:
Ректор университета
_______________ Б.А. Лёвин
«____»_________ 2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора НиколаяII»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Заключительный этап

Вариант 1.

1. Лиса Алиса ловко одурачив доверчивого Буратино, присвоила все его деньги и затем решила разделить их между всеми своими детьми. Первый ее отпрыск получил a рублей, а потом еще m-ю часть того, что остается после этой предварительной выдачи. После того, как отдана первая часть, второй ее отпрыск получил $2a$ рублей и еще m-ю часть остатка. После уплаты первых двух частей третий лисёнок получил $3a$ рублей и m-ю часть остатка и тд. Наконец $n-$ й лисенок получил na рублей и еще m-ю часть. По окончании раздела все отпрыски получили равные между собой доли денег Буратино. Спрашивается, какую сумму денег лиса Алиса украла у Буратино, и сколько детей было у нее?

2. Решить в натуральных числах систему : $\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz - yt = 1 \end{cases}$

3. Какое число больше $\ln 1{,}1$ или $\frac{1}{11}$. Ответ обосновать.

4. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.

5. Решить тригонометрическое неравенство $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0$.

6. Решить систему в области действительных чисел:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2} * \dfrac{1+xy+x^2y^2}{(1+xy)^2} = \dfrac{49}{81} \\ \dfrac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^2} * \dfrac{1-xy+x^2y^2}{(1-xy)^2} = 9 \end{cases}$$

7. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости соотношением
$\left|x-\frac{y^2}{2}\right| + \left|x+\frac{y^2}{2}\right| \le 2-y$.

8. При каких значениях параметра b существуют значения a, для которых уравнение $\sqrt{a+2ax+x^2} + \sqrt{a-2ax+x^2} = 2\sqrt{b}$ имеет единственное решение.

Утверждаю:
Ректор университета
_______________ Б.А. Лёвин
«____» __________ 2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Заключительный этап

Вариант 2.

1. Ранней весной доктор Айболит вместе со своими друзьями – зверями собакой Авва, свинкой Хрю-Хрю, лошадкой Тянитолкай и уткой Кика вернулись после путешествия по Африке в свой родной городишко. Всю эту компанию, разумеется, нужно было кормить и поэтому решили вспахать большой участок земли, доставшийся доктору от родителей и посадить там картошку, свеклу, морковку и другие не менее вкусные овощи. На следующее утро лошадка Тянитолкай приступила к вспашке. Чтобы закончить работу к 9 утра, нужно было вспахивать в среднем по 9 соток в час. Выполнив первую половину работы, Тянитолкай несколько подустал, так что в дальнейшем он вспахивал лишь по 6 соток земли в час. Поэтому вся работа была выполнена лишь к 10 утра. Какова площадь участка (в сотках) и в котором часу начали вспашку?

2. Решите в натуральных числах систему: $\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = 11 \\ x_1x_3 - x_2x_4 = 1 \end{cases}$

3. Какое из чисел больше $\ln 1{,}01$ или $\frac{2}{201}$? Ответ обосновать.

4. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Доказать, что $AC^2 = AB(AB + BC)$.

5. Решить тригонометрическое неравенство: $cos^2x + cos^2 2x + cos^2 3x + cos^2 4x \geq 2$.

6. Найти все решения системы: $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30 \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11 \end{cases}$.

7. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости соотношением: $|x - y^2| + |x + y^2| \leq 4 - 2y$.

8. Найти все значения параметра a, что уравнение $\sqrt{2 - x + a * 2^x} + \sqrt{x + a * 2^{2-x}} = 2(1 + 2a)$ имеет единственное решение.

Утверждаю:
Ректор университета
________________Б.А. Лёвин
«____»__________ 2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора НиколаяII»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Заключительный этап

Вариант 3.

1. Отец делит апельсины между тремя сыновьями; первому он дает половину того, что имеет, и еще пол-апельсина, второму - половину остатка и еще пол-апельсина; наконец третьему сыну – половину нового остатка и еще пол-апельсина; после этого у него апельсинов не остается. Сколько апельсинов было у отца первоначально и сколько апельсинов получил каждый из сыновей?

2. Решить в натуральных числах систему:
$$\begin{cases} mn + kl = 13 \\ nk - ml = 6 \end{cases}$$

3. Какое из чисел больше ln 1,2 или $\frac{1}{6}$. Ответ обосновать.

4. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE. Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30^{\circ}$, то треугольник ABC правильный.

5. Решить тригонометрическое неравенство:
$$Sin^2x + Sin^2 2x + Sin^2 3x + Sin^2 4x > 2.$$

6. Найти все действительные решения системы:
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2 \end{cases}$$

7. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости соотношением:
$$|x - 2y^2| + |x + 2y^2| \leq 8 - 4y$$

8. При каких значениях параметра b существуют такие значения a, что уравнение $\sqrt{x^2 + 4x + 4a^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4a^2} = 4b$ имеет единственное решение.

Утверждаю:
Ректор университета
_______________ Б.А. Лёвин
«____» _________ 2016г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет путей сообщения Императора НиколаяII»

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «Паруса Надежды» 2016г.

Заключительный этап

Вариант 4.

1. Для того, чтобы вспахать поле к 12:00 дня, бригаде тракторов нужно было вспахивать в среднем по 8 га/час. Но по выполнению $\frac{1}{3}$ работы часть тракторов сломалась так что следующая $\frac{1}{4}$ поля бригада вспахивала в среднем по 6 га/час, а затем после очередной поломки оставшаяся часть работы была выполнена с производительностью 5 га/час. Вследствие этого, вся работа была выполнена лишь к 16:00. Определить какова площадь поля и в котором часу начали вспашку.

2. Решить в натуральных числах систему:

$$\begin{cases} xy + zt = 7 \\ xz + yt = 5 \end{cases} \quad \text{при } x > t,\ y > z.$$

3. Какое из чисел больше ln 1,25 или 0,2. Ответ обосновать.
4. Дан треугольник, длины биссектрис которого меньше единицы. Доказать, что площадь этого треугольника меньше единицы.
5. Решить тригонометрическое неравенство:
$$Cosx + Cos2x + Cos3x + Cos4x > 0.$$

6. Найти все действительные решения системы:
$$\frac{x+y}{1+xy} = \frac{5}{4}, \frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = \frac{257}{32} \quad \text{при } x, y > 0$$
7. Найти площадь фигуры, заданной на плоскости соотношением:
$$\left|y - \frac{x^2}{2}\right| + \left|y + \frac{x^2}{2}\right| \le 2 - x.$$

8. При каких значениях параметра a существуют такие значения b, для которых $\sqrt{9b^2 - 6x + x^2} + \sqrt{9b^2 + 6x + x^2} = 6a$ имеет единственное решение.