Заочный тур 2016 год. Решение.

Вариант 1.

1) Будем решать задачу в общем виде для n прямых. Пусть B_n – максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость n прямых. Тогда если провести еще одну прямую так, чтобы она не была параллельна предыдущим и не проходила через точки их пересечения друг с другом, то эта новая прямая разбивается n предыдущими на n+1 кусок (n-1 отрезок и 2 луча). Каждый из этих кусков делит пополам один из участков предыдущего разбиения и число участков увеличивается на n+1 раз, т.е. $B_{n+1} = B_n + n + 1$. Поскольку $B_0 = 1$, то $B_1 = 1 + 1$, $B_2 = 4$, и т.д., т.е.

$$B_n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

При n=10 это число равно $B_{10} = \frac{112}{2} = 56$. Ответ: $\{56\}$.

2) $\lg y + 5^y = \lg(2x) + 5^{2x}$. Функция $f(t) = \ln t + 5^t$ является строго возрастающей функцией. Поэтому из $f(y) = f(2x)$ следует, что $y = 2x$. Тогда из второго уравнения имеем:

$2^{2-y} + 8^{-y} = 65^{y/2} * 8^{-y} = \left(\frac{65}{64}\right)^{\frac{y}{2}}$. Так как левая часть равенства функция убывающая, а правая – возрастающая, то y=2 будет единственным решением этого уравнения. Значит система имеет единственное решение $x = 1, y = 2$. А тогда ответ: $\{3\}$.

3) Методом подбора легко находим, что $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2$ являются корнями данного уравнения. А тогда разделив многочлен четвертой степени на произведение множителей $(x-2)(x-\frac{1}{2})$, получим:

$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2) = 0 \Rightarrow x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. Следовательно ответ $\{2\}$.

4) ОДЗ $x \neq 1, x \neq \pm 4$. Умножая неравенство на выражения, которые всегда положительны, получим:

$$\frac{((x^2-1)^2 - 8^2)((x+1)^2 - 6^2)((x^2-5)^2 - 4^2)}{((x-2)^2 - x^2)((x^2-5)^2 - 11^2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-9)(x^2+7)(x-5)(x^2-9)(x^2-1)}{(-2)(x-1)(x-4)(x^2+6)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x^2-9)^2(x^2+7)(x-5)(x+7)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)(x+4)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-5)(x+7)(x+1)}{(x-4)(x+4)} < 0$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим, что решение:
$x < -7;\ -4 < x < -3;\ -3 < x < -1; 4 < x < 5$. Поэтому ответ: $\{4\}$.

5) Решение задачи сводится к нахождению максимума функции
$F(x) = \sqrt{4+2x} + \sqrt{3+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{-2x}$. Рассмотрим функции
$f_1(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{1-x}$ и $f_2(x) = \sqrt{4+2x} + \sqrt{-2x}$. Нетрудно найти, что эти функции имеют максимум при одном и том же значении аргумента x=-1. Этот максимум для каждой из функций равен $2\sqrt{2}$. Поэтому максимум $F(x)$ равен $4\sqrt{2}$ при $x = -1$. А тогда $4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Отсюда ответ: $a = 4$.

6) Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно z. Оно будет иметь решения тогда и только тогда, когда его дискриминант D_z будет неотрицателен, т.е.
$D_z = (x-y)^2 - 4(y^2 + x^2 - xy - 1) = -3y^2 + 2xy - 3x^2 + 4 \geq 0.$
Рассматриваем это неравенство, как квадратное относительно переменного y. Так как коэффициент при y^2 отрицателен, то решениями этого неравенства будут все x, которые лежат на отрезке, между корнями соответствующего уравнения. А тогда неравенство будет иметь решения тогда и только тогда, когда его дискриминант относительно y будет неотрицателен, т.е.

$$\frac{4}{3} - \frac{8x^2}{9} \geq 0 \text{ или } x^2 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{1{,}5} \leq x \leq \sqrt{1{,}5}$$

Отсюда единственное целое положительное x будет $x = 1$. Ответ $\{1\}$.

7) Покрасим грани тетраэдра в синий цвет, а разбивающие его плоскости в красный цвет. Тогда каждая из частей разбиения - это многогранник, ограниченный одной синей гранью и несколькими красными, сходящимися в одной вершине - в центре тетраэдра. То есть это пирамиды с синими основаниями и красными боковыми гранями. Их столько, сколько у них синих оснований, т.е. столько треугольников, на которые поверхность тетраэдра разбита красными плоскостями. Рассмотрим одну из граней тетраэдра. Три из шести красных плоскостей проходят через ее стороны, а три другие через медианы. А так как медианы разбивают треугольник на 6 частей, то каждая грань тетраэдра разбита на 6, а самих граней 4. В итоге всего синих оснований, а значит и частей разбиения тетраэдра получается 6x4=24. Ответ: {24}

8) Пусть свинья весит x кг, Иванка – y кг, Софийка – z кг, а кум Иван весит t кг. По условиям задачи имеем равенства: $x = 4y; z = x - 50; y + z + x + 50 = \frac{9}{2}t$
Тогда подставляя выражения для y и z в третье уравнение, получим
$\frac{x}{4} + x - 50 + x + 50 = \frac{9}{2}t \Longrightarrow \frac{9x}{4} = \frac{9t}{2} \Longrightarrow \frac{x}{t} = 2$. Ответ: в 2 раза.

9) Представим данное уравнение в виде: $(y-2)^2 + (y+2x)^2 + (x+1)^2 = 2$.
Так как по условию x, y – целые числа, то равенство возможно лишь при
$y \in \{1,2,3\}, x \in \{0,-1,-2\}$. Перебирая последовательно всевозможные варианты, получим, что лишь пары: $x = -1, y = 3, x = -1, y = 1$ удовлетворяют уравнению. Ответ: {2}

Заочный тур 2016 год. Решение.

Вариант 2.

1) Пару «точка-прямая» (из имеющихся) назовем контактом, если эта прямая проходит через эту точку. Тогда каждая точка участвует в 199-ти контактах, и, стало быть, всего контактов 200*199. А каждая прямая участвует в двух контактах и значит прямых $\frac{199*200}{2} = 19900$. Здесь существенно то, что никакие 2 прямые не участвуют в одном и том же контакте, как и никакие две точки.
Ответ: 19900 прямых.
2) Преобразуя первое уравнение, получим: $\log_6 y + arctgy = \log_6 x + arctgx$. Так как функция $f(t) = \log_6 t + arctgt$ строго возрастает, то из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $y = x$. Подставляя $y = x$ во второе уравнение системы, получим $5^{1-x} + 5^{-2x} = 26^x * 5^{-2x} = \left(\frac{26}{25}\right)^x$. При x=1 это равенство, очевидно, выполняется; поскольку левая часть убывает, а правая возрастает, то решение x=y=1 единственно. Ответ {2}.
3) Заметим, что если x_0 – корень данного уравнения, то $\frac{1}{x}$ – также корень уравнения. Методом подбора находим, что число x=2 есть корень данного уравнения. А тогда число $\frac{1}{2}$ также корень данного уравнения. Так как исходное уравнение, очевидно, уравнение четвертой степени, то разделив многочлен четвертой степени на произведение множителей $(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, мы получив квадратный трехчлен, корни которого нетрудно найти. Сделаем замену: $x + 1 = t$, тогда $18(t^2 - t + 1)^2 = 49t^2(t-1)$. После преобразования получаем: $18t^4 - 85t^3 + 103t^2 - 36t + 18 = 0$. Делим этот многочлен на $(t-3)\left(t - {}^3/_2\right) = t^2 - 4{,}5t + 4{,}5$. Получаем:

$18t^4 - 85t^3 + 103t^2 - 36t + 18 = (t^2 - 4{,}5t + 4{,}5)(18t^2 - 4t + 4)$. Так как трехчлен $18t^2 - 4t + 4$ не имеет действительных корней (D<0), то ответ: {2}.
4) Так как $|x|^2 = x^2$, то умножив исходное неравенство на выражения, которые в области ОДЗ всегда положительны, мы получим следующее неравенство:

$$\frac{((x^2-3)^2-6^2)((x+3)^2-1^2)((x^2-1)^2-3^2)}{((x-2)^2-x^2)((x^2-2)^2-23^2)} > 0 \Leftrightarrow$$

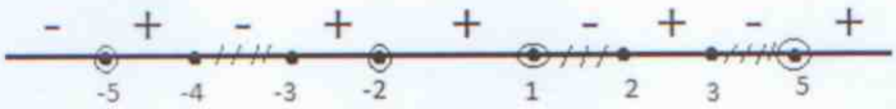
$$\frac{(x^2-3-6)(x^2-3+6)(x+3-1)(x+3+1)(x^2-1-3)(x^2-1+3)}{(x-2-x)(x-2+x)(x^2-2-23)(x^2-2+23)} > 0$$

$$\frac{(x^2-9)(x^2+3)(x+2)(x+4)(x^2-4)(x^2+2)}{(-2)(x-1)(x-5)(x+5)(x^2+21)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-3)(x+3)(x+2)(x+4)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-5)(x+5)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)(x+3)(x+4)(x-2)(x-1)(x-5)(x+5) < 0.$$

Решаем это неравенство методом интервалов: $x \neq 1, x \neq -5, x \neq 5, x \neq -2$.



Отсюда находим, что сумма длин конечных интервалов, для которых верно неравенство, будет равна 4. Ответ:{4}.

5) Запишем уравнение в виде:$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{x}=a$. Пусть $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$, а $\varphi(x)=\sqrt{8-x}+\sqrt{x}$. Покажем, что $f(x)\leq 2$ для $3\leq x\leq 5$, а $f(x)\leq 4$ для $0\leq x\leq 8$. Предположим, что: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\leq 2 \Leftrightarrow x-3+5-x+2\sqrt{(x-3)(5-x)}\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)(5-x)}\leq 1 \Leftrightarrow 5x-x^2-15+3x\leq 1 \Leftrightarrow x^2-8x+16\geq 0$, это верно, значит верно исходное неравенство, что $f(x)\leq 2$. Находим, что $\max f(x)=2$, при x=4. Аналогично доказывается, что $max f(x)=4$ при $x=4$. Отсюда следует, что $\max F(x)=\max\big(f(x)+\varphi(x)\big)=6$. А тогда ответ:{6}.

6) Представим данное равенство, как квадратное относительно переменной y: $2y^2+y(x+z)+2x^2+z^2+xz-4=0$. Это уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда дискриминант $Dy=(x+z)^2-8(2x^2+z^2+zx-4)\geq 0$. Отсюда получаем, что $-15x^2-6xz-7z^2+32\geq 0$. Рассматривая это неравенство как квадратное относительно переменной x, заметим, что коэффициент при x^2 отрицательное число. Поэтому полученное неравенство будет иметь решение тогда и только тогда, когда дискриминант $Dx=36z^2-420z^2+1920\geq 0 \Rightarrow z^2\leq 5$ В этом случае будем иметь решения для x. Эти x лежат между корнями данного неравенства. Значит должно быть, чтобы $-\sqrt{5}\leq z\leq\sqrt{5}$. Ответ: $z=-2$.

7) Если точки A_1 и A_2 лежат на поверхности сферы радиуса 1 с центром в т.0, то расстояние между точками A_1 и A_2 по теореме косинусов равно: $|A_1A_2|=\sqrt{1+1-2\cos\alpha}$, где α – угол между радиусами $0A_1$ и $0A_2$. Но тогда условие, что $|A_1A_2|>\sqrt{2}$ выполняется лишь при $\alpha>90^o$. Следовательно полусфера (включая границу) с центром в точке A_1 является мертвой зоной – точка A_2 может лежать лишь вне этой полусферы, и ее (точки A_2) мертвая зона – это полусфера, получающаяся из мертвой зоны точки A_1 поворотом на угол α вокруг оси сферы, перпендикулярной плоскости $A_1\ 0\ A_2$. Объединение этих мертвых зон представляет собой сферический сектор с углом раствора 180+ α и, стало быть, свободной зоной остается сектор с углом раствора $360^o-(180+\alpha)=180^o-\alpha$, что меньше 90^o, т.к. $\alpha>90^o$. Остальные точки могут лежать лишь в этом «свободном секторе». Плоскость $A_1\ 0\ A_2$ делит его на две равные половинки, и если т. A_3 лежит в одной из них, то ее (точки A_3) мертвая зона накрывает эту половинку полностью. Поэтому точка A_4 лежит внутри оставшейся половинки, накрывает ее всю, и для т. A_4 места уже не останется. Значит число точек не превышает 4. Этот

максимум будет достигаться, если A_i- это вершины вписанного в сферу правильного тетраэдра (ребро правильного тетраэдра, вписанного в единичную сферу равно $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ответ:{4}.

8) Пусть свинья весит х кг, кума Параска – у кг, Горпина – z кг, а Лушка – а кг. По условиям задачи имеем: $a + 80 = x, x = 3z, a + z + x + 80 = \frac{14}{3}y$. Подставляя выражения $z = \frac{x}{3}$; $a = x - 80$ в третье уравнение, получим равенство : $x - 80 + \frac{x}{3} + x + 80 = \frac{14}{3}y$, отсюда находим 2y=x, а тогда ответ:{2}.
9) Преобразуя уравнение, получим $(x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Так как x,y – целые числа, то $x \in \{3,1,2\}, y \in \{0,1,2\}$. Перебирая последовательно всевозможные варианты (x, y), найдем, что решениями будут пары: (3,1) и (1,1). Ответ:{2}.