I тур «Паруса надежды» 2015 год.
Вариант 1.
Решение.

1. $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)\right) > \log_2 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x}\right) < \frac{1}{4}$

$\log_{\frac{1}{4}} 1 < \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-1}{x}\right) < \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{x-1}{x} < 1 \Rightarrow x > 2+\sqrt{2}$. Так как $2+\sqrt{2} \approx 3{,}4$, то

Ответ: $\{4\}$

2. Пусть m – количество монет, которые получил Буратино на покупку букваря, n монет он спрятал за щекой и m-n закопал на поле чудес. Тогда по условиям задачи получим систему неравенств: $\begin{cases} m < 3n+6 \\ m > 12+2n \\ m \le 30 \end{cases}$ Из этой системы находим, что $6 < n \le 9$.

Значит возможные значения n будут 7, 8, 9. Подставляя последовательно эти числа в систему неравенств, получим, что подходит лишь $n = 9$, при этом $m = 29$. Ответ: $\{29\}$

3. Рассмотрим три промежутка изменения x: 1) $x \le 0$; 2) $0 \le x \le 1$; 3) $x \ge 1$.
В области $x \le 0$ получим $|y+x-1| - x \le 2$, $|y-x-1| \le 2+x \Rightarrow 2+x \ge 0$ следовательно $-2 \le x \le 0$. А тогда $(y+x-1)^2 \le (2+x)^2 \Leftrightarrow (y-3)(y+2x+1) \le 0$.
В области $0 \le x \le 1$ получаем
$|y+x-1| \le 2-x \Rightarrow (y+x-1)^2 \le (2-x)^2 \Leftrightarrow (y+1)(y+2x-3) \le 0$
В области $x \ge 1$ получим: $|y-x+1| + x \le 2 \Leftrightarrow |y-x+1| \le 2-x \Rightarrow 1 \le x \le 2$. А тогда имеем. $(y-x+1)^2 \le (2-x)^2 \Leftrightarrow (y-1)(y-2x+3) \le 0$. Далее на координатной плоскости строим в соответствии с полученными неравенствами области, ограниченные соответствующими прямыми. Полученная область $ABCDEF$ будет состоять из двух прямоугольных треугольников ABF, CDE и трапеции $BCEF$. Координаты вершин области будут: $A(-2;3)$, $B(0;3)$, $C(1;1)$, $D(2;1)$, $E(1;-1)$, $F(0;-1)$. По этим точкам легко находим площадь области: $S = 8$. Ответ: $\{8\}$

4. Последовательно подставляя в уравнение числа 1, 2, 3, 4 убеждаемся, что эти числа являются корнями уравнения. Так как уравнение четвёртой степени, то других корней оно не имеет. Ответ: $\{10\}$

5. Запишем уравнение в виде: $(x+y)^2 + 1 + 2(x+y) + y^2 + 4xy + 4x^2 = 5$, отсюда получим: $(x+y+1)^2 + (y+2x)^2 = 5$. Так как x, y – целые числа, то равенство возможно если только: $\begin{cases} (x+y+1)^2 = 1 \\ (y+2x)^2 = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x+y+1)^2 = 4 \\ (y+2x)^2 = 1 \end{cases}$. Следовательно либо $\begin{cases} x+y+1 = \pm 1 \\ y+2x = \pm 2 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x+y+1 = \pm 2 \\ y+2x = \pm 1 \end{cases}$.

А тогда комбинируя различные равенства, получим восемь систем:

$\begin{cases} x+y+1=1 \\ y+2x=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y=1 \\ y+2x=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ y+2x=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+1=-1 \\ y+2x=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+1=2 \\ y+2x=1 \end{cases}$,

$\begin{cases} x+y+1=2 \\ y+2x=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+1=-2 \\ y+2x=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+1=-2 \\ y+2x=1 \end{cases}$.

Решая последовательно эти системы, получим решения: $(2,-2)$, $(-2,2)$, $(0,-2)$, $(4,-6)$, $(0,1)$, $(-2,3)$, $(2,-5)$, $(4,-7)$. Просуммируя эти числа, получим <u>Ответ</u>: $\{-8\}$.

6.По формуле для $Sin(\alpha+\beta)$ получим равенство: $Cos^2\alpha + Cos^2\beta = Sin\alpha Cos\beta + Cos\alpha Sin\beta$. Отсюда имеем: $Cos\alpha(Cos\alpha - Sin\beta) = Cos\beta(Sin\alpha - Cos\beta)$. Так как по условию α и β острые углы, то разности $Sin\alpha - Cos\beta$ и $Cos\alpha - Sin\beta$ имеют одинаковые знаки. Пусть для определённости они положительны. Тогда

$\begin{cases} Cos\alpha - Sin\beta > 0 \\ Sin\alpha - Cos\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cos\alpha > Sin\beta \\ Sin\alpha > Cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cos^2\alpha > Sin^2\beta \\ Sin^2\alpha > Cos^2\beta \end{cases} \Rightarrow Sin^2\alpha + Cos^2\alpha > 1$, а $Sin^2\beta + Cos^2\beta < 1$. Поэтому получим: $Sin\left(\pi/2 - \alpha\right) = Sin\beta$, т.е $\pi/2 - \alpha = \beta \Rightarrow \alpha+\beta = 90^\circ$.

<u>Ответ</u>: 90.

7. Используя неравенство для средних величин: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, можно записать:

$\sqrt[4]{2x^2 \cdot xy^2 \cdot z^2 \cdot 4zt} \leq \frac{2x^2 + xy^2 + z^2 + 4zt}{4} = 2,\ tx^3z^3y^2 \cdot 8 \leq 16,\qquad x^3y^2z^3t \leq 2.$ Это неравенство переходит в равенство, если числа между собой равны, т.е $2x^2 = xy^2 = z^2 = 4zt = \sqrt[4]{2}$. Значит наибольшее значение выражения равно 2.

<u>Ответ</u>: $\{2\}$

8. Имеем $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$. $17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$ Следовательно первое число меньше второго.
<u>Ответ</u>: $\{2\}$

9. Пусть h_a - высота треугольника, опущенная на сторону a, а h_b - высота, опущенная на сторону b. По условию задачи имеем $a \leq h_a$, $b \leq h_b$. Но в любом треугольнике $h_a \leq b$, а $h_b \leq a$. Отсюда получаем, что $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$. Значит $a = b = h_a = h_b$, т.е треугольник прямоугольный и равнобедренный, его углы равны $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.
Поэтому <u>Ответ</u>: $\{135\}$

I тур «Паруса Надежды» 2015 год.

Вариант 2.
Решение.

1. Находим ОДЗ: $(x-2)x>0$. Отсюда $x<0;\ \ x>2$. Если $|x-1|<1$, то $0<x<2$, значит $|x-1|>1$. А тогда неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} |x-1|>1 \\ \dfrac{x-2}{x}>|x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \text{ а)}\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x-2}{x}>1-x \end{cases} \text{ или б) } \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{x-2}{x}>x-1 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что решением первой систем а) будет $-\sqrt{2}<x<0$, вторая система б) решений не имеет. <u>Ответ</u>: $\{-1\}$

2. Пусть у Мальвины n монет, у Пьеро m монет. По условию задачи имеем систему неравенств: $\begin{cases} m+n<40 \\ n<8m \\ n\ge 4m+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n<40-m \\ n\ge 4m+15 \end{cases} \Rightarrow 4m+15<40-m,\ 5m<25$

Следовательно $m<5$. С другой стороны, заметим, что $4m+15<8m$, т.е $m>\dfrac{15}{4}$.

Получаем, что $\dfrac{15}{4}<m<5$. Значит $m=4$. А тогда $\begin{cases} n<36 \\ n<32 \\ n\ge 31 \end{cases} \Rightarrow n=31$. <u>Ответ</u>: $\{31\}$

3. Рассмотрим три промежутка изменения x: 1) $x\le 0$; 2) $0\le x\le 2$; 3) $x\ge 2$.

1) $x\le 0$; тогда $|y+x-2|-x\le 4$, $|y+x-2|\le 4+x \Rightarrow -4\le x\le 0$. Возводя неравенство в квадрат, получим $(y+x-2)^2\le(4+x)^2$, отсюда $(y-6)(y+2x+2)\le 0$

2) $0\le x\le 2$, тогда $|y+x-2|\le 4-x \Leftrightarrow (y+x-2)^2\le(4-x)^2 \Leftrightarrow (y+2x-6)(y+2)\le 0$

3) $x\ge 2$, тогда $|y-x+2|\le 4-x \Rightarrow 2\le x\le 4$. Значит в этой области $(y-x+2)^2\le(4-x)^2 \Leftrightarrow (y-2)(y-2x+6)\le 0$. На координатной плоскости строим соответствующие области с учётом изменения x. Получим область $ABCDEF$, которая состоит из двух прямоугольных треугольников ABF и CDE, а также трапеции $BCEF$. Координаты точек легко находятся: $A(-4;\ 6)$, $B(0;\ 6)$, $C(2;2)$, $D(4;2)$, $E(2;-2)$ и $F(0;-2)$

С учётом этого, площадь области будет равна 32. <u>Ответ</u>: $\{32\}$

4. Заметим, что подставляя в уравнение последовательно числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 мы будем получать равенство: 0 = 0. Значит эти числа являются корнями данного уравнения. А так как уравнение шестой степени, то других корней, кроме указанных выше чисел, нет. <u>Ответ</u>: $\{21\}$

5. Преобразуя уравнение, получим:

$(x+y)^2-2(x+y)+1+y^2-4xy+4x^2=4 \Leftrightarrow (x+y-1)^2+(y-2x)^2=4$. Так как x и y целые числа, то данное равенство возможно лишь в четырёх вариантах:

$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-2x=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-1=2 \\ y-2x=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-2x=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ y-2x=0 \end{cases}$

Первая и четвертая системы целых решений не имеют. Вторая система имеет целое решение $x=1$, $y=2$, третья система решение $x=1$, $y=0$. Ответ: $\{4\}$

6. Пользуясь формулой для $Sin(\alpha+\beta)$, получаем:

$Sin^2\alpha+Sin^2\beta=Sin\alpha Cos\beta+Cos\alpha Sin\beta \Leftrightarrow Sin\alpha(Sin\alpha-Cos\beta)=Sin\beta(Cos\alpha-Sin\beta)$. Так как α,β острые углы, то скобки $Sin\alpha-Cos\beta$ и $Cos\alpha-Sin\beta$ имеют одинаковые знаки. Пусть они положительны, тогда:

$$\begin{cases} Sin\alpha-Cos\beta>0 \\ Cos\alpha-Sin\beta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sin\alpha>Cos\beta \\ Cos\alpha>Sin\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sin^2\alpha>Cos^2\beta \\ Cos^2\alpha>Sin^2\beta \end{cases}$$

$\Rightarrow Sin^2\alpha+Cos^2\alpha>Cos^2\beta+Sin^2\beta=1$, что невозможно. Так же невозможно, чтобы $Sin^2\beta+Cos^2\beta<1$. Значит $Sin\alpha=Cos\beta,\ Cos\alpha=Sin\beta \Rightarrow Sin\alpha=Sin(90-\beta)\Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$. Аналогичное доказательство в случае, если скобки $Sin\alpha-Cos\beta$ и $Cos\alpha-Sin\beta$ обе отрицательны. Ответ: $\{90^\circ\}$

7. Из неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического трёх чисел имеем:

$$\sqrt[3]{2x\cdot 3xy^2\cdot 2z}\le\frac{2x+3xy^2+2z}{3}=12\Rightarrow 3xy^2\cdot 2z\cdot 2x\le 12^3,\ \ x^2y^2z\le 144$$

Это неравенство переходит в равенство, если числа между собой равны, т.е. $2x=3xy^2=2z=12\Rightarrow z=6, x=6, y=\sqrt{2/3}$. Значит наибольшее значение равно 144.

Ответ: $\{144\}$

8. Покажем, что левое число больше правого. Для этого запишем первое число так: $(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot1000)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot1000)=(1\cdot1000)(2\cdot999)(3\cdot998)(4\cdot997)\ldots(k(1000-k+1))\ldots$ В этом произведении в каждой паре, стоящей в скобках, произведения чисел, очевидно, не меньше 1000, а так как таких пар ровно тысяча, то и произведение этих пар будет строго больше, чем $(1000)^{1000}$ т.к. лишь 1-я пара равна 1000. Ответ: $\{1\}$

9. Среди треугольников с двумя сторонами a, b, которые удовлетворяют условиям $0<a\le1,\ \ 1\le b\le2$. Наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с катетами $a=1$, $b=2$. Его площадь $S=1$. С другой стороны, третья сторона $c=\sqrt{5}$ как гипотенуза прямоугольного треугольника удовлетворяет условию, что $2\le c\le3$ и поэтому среди всех рассматриваемых треугольников, прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 имеет наибольшую площадь. Ответ: $\{1\}$