ЗАДАНИЯ

по математике

олимпиады школьников «Паруса надежды»
2013-2014 учебный год

(Отборочный этап)

Утверждаю:
___________________/Б.А. Лёвин/
председатель оргкомитета
олимпиады по математике
«Паруса надежды»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования.
«Московский государственный университет путей сообщения»

Олимпиада по математике «Паруса Надежды» 2014 год.
I тур
Вариант 1

1. Петя, Володя и Коля совершили дерзкий набег на чужой сад, так что у Пети за пазухой оказалось в целое число раз больше яблок, чем у Володи, а у Коли во столько же раз больше чем у Пети. Затем Петя и Коля отдали Володе по 2 яблока, после чего полученное количество яблок у ребят составило арифметическую прогрессию. Сколько яблок было у ребят первоначально после набега? В ответе указать сумму всех похищенных яблок.

2. Найти произведение корней уравнения
$$(x-1)\log_3 x = \frac{x+1}{2}$$

3. Дан треугольник ABC, AB = 4, BC = 5, AC = 6. На стороне BC взята точка K так, что BK = $\frac{1}{2}$. На стороне AC взята точка M так что CM = $\frac{27}{8}$. Найти расстояние d между центрами окружностей , описанных вокруг треугольников ABK и AKM. В ответе указать число равное 4d.

4. Найти наименьшее значение *x,* удовлетворяющее уравнению
$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+\ldots+|x-10|+|x+10|=20x$$

5. Найти все целые n, при которых справедливо равенство $\frac{n^2+4n+10}{n+3}=8-2\sqrt{13-3n}$

6. Дано $\cos x\cos y\cos z = m,\qquad \sin x\sin y\sin z = n$, где m, n произвольные действительные числа. Найти $\cos 2x\cos 2y+\cos 2y\cos 2z+\cos 2x\cos 2z$.

   В ответе записать значение этого выражения при $m=\frac{\sqrt{3}}{4},\ \ n=\frac{1}{4}$.

7. Найти все рациональные решения системы:
$$\begin{cases} a+c=5 \\ ad+bc=5 \\ ac+b+d=8 \\ bd=1 \end{cases}$$
   В ответе записать сумму всех решений данной системы.

8. При каких значениях параметра *a* множество значений функции $y=\frac{16x-20}{4x^2-a}$ не содержит ни одного значения из отрезка [1;4]. В ответе указать наибольшее натуральное *a*, удовлетворяющее условию задачи.

9. Найти целую часть числа $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}}}$

Утверждаю:
___________________/Б.А. Лёвин/
председатель оргкомитета
олимпиады по математике
«Паруса надежды»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования.
«Московский государственный университет путей сообщения»

Олимпиада по математике «Паруса Надежды» 2014 год.
I тур
Вариант 2

1. У Маши в целое число раз больше игрушек, чем у Лены, а у Лены во столько же раз больше, чем у Кати. Маша подарила Лене 3 игрушки, а Катя подарила Лене 2 игрушки. После чего количество игрушек у девочек стало составлять арифметическую прогрессию. Сколько первоначально игрушек было у каждой девочки? В ответе указать общее число игрушек, которое было у девочек.

2. Найти произведение корней уравнения
$$(3x-3)\log_2 x = x+1$$

3. Дан треугольник PEF со сторонами PE = 3, PF = 5, EF = 7. На продолжении стороны FP за точку P отложен отрезок PA = 1,5. Найти расстояние d между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников EPA и EAF. В ответе указать число, равное 2d.

4. Найти минимальное значение суммы
$$\left|x-1^2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-3^2\right|+\ldots+\left|x-10^2\right|$$

5. Найти все целые *n*, при которых справедливо равенство $\frac{n^2+3n+5}{n+2}=1+\sqrt{6-2n}$

6. Решить систему
$$\begin{cases} tg^3x+tg^3y+tg^3z=36 \\ tg^2x+tg^2y+tg^2z=14 \\ (tgx+tgy)(tgx+tgz)(tgy+tgz)=60 \end{cases}$$
В ответе указать сумму минимального и максимального tgx, являющегося решением системы.

7. Решить систему
$$\begin{cases} a+c=4 \\ ad+bc=5 \\ ac+b+d=8 \\ bd=1 \end{cases}$$
В ответе записать сумму всех решений данной системы.

8. При каких значениях параметра *a* множество значений функции $y=\frac{8x-20}{a-x^2}$ не содержит ни одного значения из отрезка [-4;-1] В ответе указать наибольшее натуральное *a*, удовлетворяющее условию задачи.

9. Найти целую часть числа $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$