Олимпиада «Паруса надежды» по математике 2014 год.

Решение.

Вариант 1.

1. ОДЗ $x < 2$; $x \neq 1$

   $\log_{2-x}\left(8-x^3\right) \geq \log_{2-x}(2-x)^3 \Leftrightarrow \left(8-x^3-(2-x)^3\right)(2-x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

   $(1-x)\left(12x-6x^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$. Ответ: $0 \leq x < 1$

2. Область симметрична относительно осей координат. Поэтому достаточно нарисовать и вычислить площадь в первой четверти. Тогда имеем: $2-x \leq y \leq 4-x$, $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$.

   Получим трапецию $ABCD$, чьи стороны заданы уравнениями

   $y = 4-x$, $y = 2-x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ (см. рисунок). Находим координаты вершин трапеции: $A\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $B\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ и длины сторон: $OA = OB = \frac{4}{3}\sqrt{5}$,

   $OD = OC = \frac{2}{3}\sqrt{5}$, где O – начало координат. Пусть $\angle AOB = \varphi$. Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} - S_{ODC}$.

   По формуле $tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ находим, что $tg\varphi = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$, где k_2 и k_1 угловые коэффициенты прямых OA и OB. Зная $tg\varphi$, находим, что $\cos^2\varphi = \frac{16}{25}$, отсюда

   $\sin^2\varphi = \frac{9}{25}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. А тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{80}{9} - \frac{20}{9}\right) = 2$. Следовательно искомая площадь равна $4 \cdot 2 = 8$. Ответ: {8}

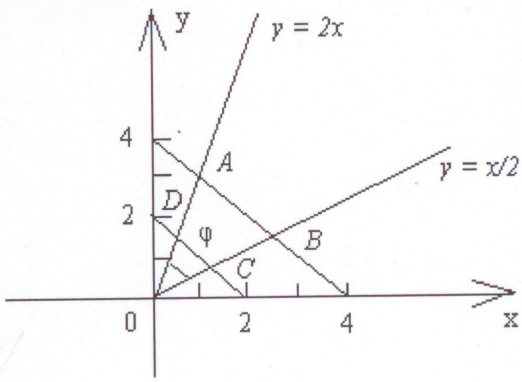


Рис. 1

3. Пусть корнет родился в 18 m n году, умер в 18 k p, где m, n, k, p – цифры. По условию имеем: m + n = k + p. Пусть корнет прожил 8x лет, где x – цифра.
   Тогда 10k + p – 10m – n = 8x, подставляя в это выражение p = m + n – k, получим 9k – 9m = 8x, следовательно 8x нацело делится на 9, т.е. 8x = 81. А тогда имеем k = m + 9 $\Rightarrow$ k = 9, m = 0. И наконец так как n = 9 + p, то p = 0, n = 9. Ответ: 1809 год.
4. Записывая равенство в столбик, получим:

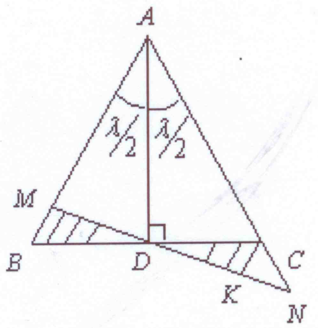
$$\begin{array}{r} *9* \\ 11 \\ \hline *9* \\ *9* \\ \hline ***1* \end{array}$$ рис.1

В этом равенстве нужно определить десять цифр. Занумеруем их сверху вниз. Так как в делимом четвертая цифра дана 1, то вторая и шестая цифры – 2, а тогда седьмая – единица и четвертая также двойка. А тогда имеем:

$$\begin{array}{r} *92 \\ 11 \\ \hline *92 \\ *92 \\ \hline 1**12 \end{array}$$ рис.2

Из рис.2 видно, что первая, вторая и третья звездочки определяют одно и то же число. Обозначим это число x. Так как x + 9 + 1 есть двузначное число, то его первая цифра равна 1, т.е. x = 9. А тогда делимое есть 10912, а частное 992. Ответ: 10912, 992.

5. Так как для всякого положительного числа произведение его цифр не превосходит это число, то имеем систему неравенств $\begin{cases} x^2-10x-22>0 \\ x^2-10x-22\le x \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-10x-22>0 \\ x^2-11x-22\le 0 \end{cases}$. Корни первого неравенства будут: $x=5\pm\sqrt{47}$, второго $x=\dfrac{11\pm\sqrt{209}}{2}$, отсюда следует, что $5+\sqrt{47}<x\le\dfrac{11+\sqrt{209}}{2}$. А тогда имеем, что $11{,}5<x<13$. Так как x – целое число, то x = 12. Проверка показывает, что 12 удовлетворяет условию задачи. Ответ: {12}
6. Докажем, что для любого числа x выполняется неравенство: $2x^4+4x^2-16x+11>0$. Для функции $f(x)=2x^4+4x^2-16x+11$ ее производная равна: $f'(x)=8x^3+8x-16$. Находим критические точки: $8x^3+8x-16=0$, $x^3+x-2=0$, $x^3-1+x-1=0,\ \ (x-1)(x^2+x+2)=0$. Получаем единственную критическую точку x = 1. По знаку производной определяем, что x = 1 точка минимума. В этой точке $y_{\min}=2+4-16+11=1>0$. А тогда наше неравенство выполняется для всех x.
7.



Пусть $\angle A=\lambda\ge 60^\circ$ наибольший угол в треугольнике, *AD* > 1 его биссектриса. Проведём через точку *D* прямую перпендикулярную *AD* и пересекающую стороны угла *A* в точках *B* и *C*. Покажем, что ΔABC минимальной площади. Так как биссектриса $AD\perp BC$, то

$AB = AC$ и $S_{ABC} = BD \cdot AD = AD^2 tg\, \lambda/2 > 1 \cdot tg30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Проведём через точку D какую либо прямую, пересекающую стороны угла в точках M и N. Пусть для определенности $MD < DN$. Тогда, если из т. C провести прямую $CK \parallel AB$, то $S_{BMD} = S_{DCK}$ и следовательно $S_{MAN} > S_{ABC}$, что и требовалось доказать.

8. Пусть (a,b) пара чисел, удовлетворяющих условию задачи. Тогда равенство справедливо для любого x, в том числе для $x = \pi$, и $x = 2\pi$. Подставляя эти значения x, получим систему $\begin{cases} -2a + b^2 = Cos(\pi a + b^2) - 1 \\ b^2 = Cos(2\pi a + b^2) - 1 \end{cases}$ Из второго равенства следует, что $b^2 \le 0$, т.е. $b = 0$, а тогда $Cos 2\pi a = 1 \Leftrightarrow a = n \in N \cup \{0\}$. Из первого равенства получаем $Cos \pi a = 1 - 2a \Rightarrow -1 \le 1 - 2a \le 1 \Leftrightarrow 0 \le a = n \le 1$. Следовательно, необходимым условием задачи удовлетворяют только две пары чисел $a = 0, b = 0$ и $a = 1, b = 0$. Проверим, что для этих пар равенство удовлетворяется для всех x. При $a = b = 0$ имеем $Cos 0 = 1$, что верно. При $a = 1$ и $b = 0$ получим $Cos x = Cos x$, что также верно.
Ответ: (0;0), (1;0).

Олимпиада «Паруса надежды» по математике 2014 год.
Решение.
Вариант 2.

1. ОДЗ x > -2; x ≠ -1

$\log_{2+x}\left(8+x^3\right)\le \log_{2+x}\left(2+x\right)^3 \Leftrightarrow \left(8+x^3-\left(2+x\right)^3\right)\left(2+x-1\right)\le 0 \Leftrightarrow x\left(x+2\right)\left(x+1\right)\le 0 \Rightarrow .$

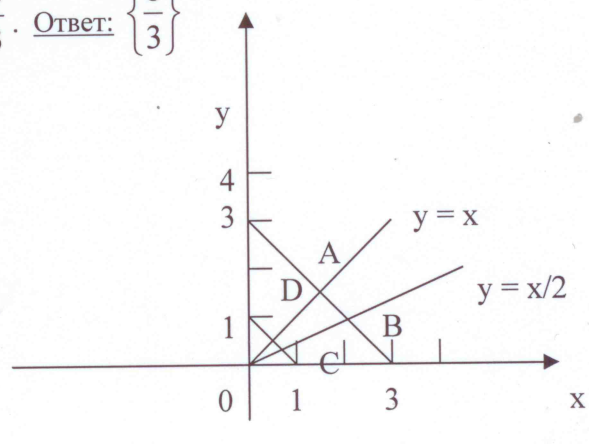
Ответ: $-2<x<-1;\ x\ge 0$

2. Фигура симметрична относительно осей координат. Поэтому построим область в первой четверти. Тогда имеем: $\begin{cases} \frac{x}{2}\le y\le x \\ 1-x\le y\le 3-x \end{cases}$. Так как прямые $y=3-x$ и $y=1-x$ параллельны, то область будет трапецией $ABCD$,стороны которой будут отрезки прямых $y=\frac{x}{2},\quad y=x,\quad y=1-x,\quad y=3-x$. Построив эти прямые, найдем координаты вершин трапеции: $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $B\left(2,\ 1\right)$, $C\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Пусть O – начало координат, α – угол между прямыми OA и OB. Тогда $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$. Отсюда находим, что

$\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$ и следовательно $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Строим область (см. рис). Находим $OA=\frac{3}{\sqrt{2}}$,

$OD=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB=\sqrt{5}$, $OC=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Отсюда $S_{ABCD}=S_{OAB}-S_{ODC}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{2}{3}$

А тогда вся площадь равна $\frac{8}{3}$. Ответ: $\left\{\frac{8}{3}\right\}$



3. Пусть год рождения князя 17 m n, год смерти 17 k p, где m, n, k, p – цифры. По условию: m + n + 1 = k + p, 10k + p – 10m – n = 7x, где x – цифра. Подставляя p = m + n + 1 – k во второе равенство, получим: 10k + m + n + 1 – k – 10m – n = 7x ⇔ 9k – 9m = 7x – 1 ⇒ 7x – 1 делится на 9. это будет лишь при x = 3, т.е. князь прожил 73

года, но тогда k = m + 8. Так как k, m, цифры, то это равенство возможно лишь при m = 0, k = 8 или m = 1, k = 9. В первом случае год рождения 170 n, год смерти 178 p, во втором случае год рождения 171 n, год смерти 179 p. А тогда получим, что n = 7 + p. Следовательно $n \in \{7,8,9\}$, $p \in \{0,1,2\}$. А тогда при p = 0, n = 7 получим даты (1707, 1780), (1717, 1790), при p = 1, n = 8: (1708, 1781), (1718, 1791), p = 2, n = 9: (1709, 1782) и (1719, 1792). По условию задачи подходит год рождения князя 1718, год смерти 1791 (1791 нечетное число, делящееся на 9)
Ответ: {1718}

4. Занумеруем все числа по порядку сверху вниз, чисел будет 22, из них известных 11. А тогда, очевидно, что последнее число будет равно 2. Так же очевидно, что число с номером 16 будет равно 2, а число с номером 9 равно 7. Следовательно в результате умножения у нас получится число 768668. По числу 18784 находим, разделив его на 2, что первый множитель равен 9374, второй – 82. Ответ: 9374 и 82.

5. Так как для всякого положительного числа произведение его цифр не превосходит это число, то получаем систему двух неравенств: $\begin{cases} x^2 - 15x - 10 > 0 \\ x^2 - 16x - 10 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

корни $x^2 - 15x - 10 = 0$ будут $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{265}}{2}$

корни $x^2 - 16x - 10 = 0$ будут $x = 8 \pm \sqrt{74}$

$\Rightarrow \dfrac{15 + \sqrt{265}}{2} < x \le 8 + \sqrt{74} \Rightarrow 15{,}5 < x < 17 \Rightarrow x = 16$.

Сделаем проверку: 256 – 240 – 10 = 6 > 0 Ответ: {16}

6. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{5}{24} + \dfrac{3}{2}x^4 + 2x^2 - \dfrac{7}{3}x^3 - x$. Покажем, что $f(x) > 0$ для любого x. Найдем производную этой функции. $f'(x) = 6x^3 + 4x - 7x^2 - 1$. Находим корни производной: $6x^3 + 4x - 7x^2 - 1 = 0$. Так как $y'(0) = -1$, $y'(1) = 2$, то в силу непрерывности производной, находим, что один корень лежит в промежутке (0, 1). Проверяя число $x = \dfrac{1}{2}$, убеждаемся, что это корень. Деля уголком $6x^3 + 4x - 7x^2 - 1$ на $x - \dfrac{1}{2}$, получим $6x^3 + 4x - 7x^2 - 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(6x^2 - 4x + 2)$. Квадратный трехчлен не имеет корней, т.к. D < 0. Значит $x = \dfrac{1}{2}$ единственный корень производной. Так как производная в точке $x = \dfrac{1}{2}$ меняет знак с минуса на плюс, то в т. $x = \dfrac{1}{2}$ $f(x)$ имеет минимум. Находим: $f_{\min} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{16} - \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{24} = \dfrac{3}{32} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{96} > 0$. Следовательно в любой точке $f(x) > 0$, что и требовалось доказать.

7. Разобьем квадрат двумя прямыми на четыре равных квадрата. Так как в квадрате лежит 5 точек, то какие – то две точки будут лежать в одном из полученных квадратов. Так как диаметр такого квадрата будет равен $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то расстояние

между этими двумя точками и будет меньше или равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, что и требовалось доказать.

8. Так как уравнение выполняется для всех x, следовательно и при x = 0. Отсюда получаем: $\sin b = b$. Это уравнение имеет единственное решение b = 0. Докажем это. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \sin x$. $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, поэтому $f(x)$ возрастает. Если b = 0, то $f(b) = 0 - \sin 0 = 0$ и b = 0 единственное решение. Итак, необходимое условие b = 0. В этом случае равенство принимает вид: $\sin ax = a\sin x$. Подставим $x = \frac{\pi}{2}$, получим $\sin\frac{a\pi}{2} = a$, поэтому $|a| \leq 1$. При $a = \pm 1,\ \ b = 0$ равенство выполняется. Также это равенство верно и при $a = 0,\ \ b = 0$. Пусть $0 < |a| < 1$. Тогда подстановка $x = \frac{\pi}{2a}$ приводит к равенству $\sin\frac{\pi}{2} = a\sin\frac{\pi}{2a} \Leftrightarrow 1 = a\sin\frac{\pi}{2a}$, которое невозможно при $0 < |a| < 1$. <u>Ответ:</u> $a = \pm 1,\ \ b = 0$; $a = 0,\ \ b = 0$