Олимпиада «Океан знаний» — 2018

1. Профессора кафедры математического моделирования ДВФУ в прошлом учебном году поставили 6480 двоек, тем самым перевыполнив взятые на себя в начале года обязательства. В следующем учебном году число профессоров увеличилось на 3, и каждый из них стал ставить больше двоек. В результате был поставлен новый рекорд для закрытых помещений: 11200 двоек за год. Сколько профессоров было первоначально, если каждый профессор выставляет в сессию такое же количество двоек, что и другие?

   □ Пусть количество профессоров равно p. Тогда количество поставленных каждым из них двоек равно $6480/p$. И это число меньше чем количество двоек, поставленных в следующем учебном году — $11200/(p+3)$. Поэтому $p \geq 5$. Каждый профессор ставит целое количество двоек, поэтому $6480 = 2^4 3^4 5$ делится на p и $11200 = 2^6 5^2 7$ делится на $p+3$. Число p не может делиться на 3, поскольку 11200 не делится на 3. Следовательно $p = 5^m 2^n \geq 5$, где либо $m = 0; n = 3, 4$, либо $m = 1; n = 0, 1, 2, 3, 4$. В первом случае получаем значения $p + 3 = 11$ или $p + 3 = 19$, которые не являются делителями 11200. Если $m = 1$, то $p + 3 = 13, 23, 43, 83$ при $n = 1, 2, 3, 4$ и поэтому единственный вариант, удовлетворяющий условиям $m = 1, n = 0, p = 5$.

2. Найти натуральные числа n такие, что для всех положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству
$$n(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$$
   найдется треугольник со сторонами a, b, c.

   □ Поскольку $(ab + bc + ca) \leq (a^2 + b^2 + c^2)$, то $n > 5$. Если $n \geq 7$, то числа $a = 1, b = 1, c = 2$ удовлетворяют неравенству $n(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$, но не могут быть длинами сторон треугольника. Следовательно, остается проверить значение $n = 6$. Покажем, что из условия $6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2)$, где $0 < a \leq b \leq c$ следует, что $c < a + b$ и поэтому числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника.

   Действительно, рассматривая условие как квадратичное неравенство относительно c, получим
$$5c^2 + 6(a+b)c + [5(a^2 + b^2) - 6ab] < 0; \quad D/4 = 16(ab - (a-b)^2) \leq 16ab.$$
   Поэтому, учитывая, что $2\sqrt{ab} \leq a + b$, заключаем
$$c < \frac{3(a+b) + 4\sqrt{ab}}{5} \leq a + b.$$

3. Последовательность многочленов задается условиями:
$$P_0(x) = 1, \ P_1(x) = x, \ P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \ n = 1, 2, \ldots.$$
   Сколько различных действительных корней имеет многочлен $P_{2018}(x)$?

   □ Докажем по индукции, что многочлен $P_n(x) = x^n + \ldots$ имеет ровно n различных действительных корней, при этом между соседними корнями $P_n(x)$ лежит ровно один корень многочлена $P_{n-1}(x)$. Действительно, $P_2(x) = x^2 - 1$, $P_3(x) = x(x^2 - 2)$ и это утверждение верно для $n = 3$. Пусть $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$, где $P_n(x_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, n$, $P_{n-1}(y_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае значения $P_{n-1}(x_j)$ и $P_{n-1}(x_{j+1})$ имеют разные знаки. Тогда $P_{n+1}(x_j) = xP_n(x_j) - P_{n-1}(x_j) = -P_{n-1}(x_j)$ и $P_{n+1}(x_{j+1}) = -P_{n-1}(x_{j+1})$ также имеют разные знаки. Поэтому на интервале (x_j, x_{j+1}), $j = 1, 2, \ldots, n-1$ имеется корень многочлена $P_{n+1}(x)$. Покажем, что многочлен $P_{n+1}(x)$ имеет еще корни на интервалах $(-\infty, x_1)$ и $(x_n, +\infty)$. Заметим, что $P_{n+1}(x_n) = -P_{n-1}(x_n) < 0$ и $P_{n+1}(a) > 0$, если a достаточно велико. Следовательно, на интервале (x_n, a) есть корень многочлена $P_{n+1}(x)$. Аналогично рассматривается интервал $(-\infty, x_1)$. Таким образом, многочлен $P_{n+1}(x)$ имеет ровно $n + 1$ корень.

4. На одной из сторон прямоугольного треугольника ABC, катеты которого равны 1, выбрана точка P. Найти максимальное значение $PA \cdot PB \cdot PC$.

   □ В декартовой системе координат $A(1, 0); B(0, 1); C(0, 0)$. Если $P(x, 0)$ на стороне AC, то
$$PA \cdot PB \cdot PC = x(1-x)\sqrt{1+x^2} \leq \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

но указанная оценка не достигается при $x \in [0, 1]$. Аналогичная ситуация, если P на стороне BC. Пусть $P(x, 1-x)$ на гипотенузе AB. Тогда

$$PA \cdot PB \cdot PC = 2x(1-x)\sqrt{x^2 + (1-x)^2} = 2t\sqrt{1-2t},$$

где $t = x(1-x) \in [0, 1/4]$. Функция $2t\sqrt{1-2t}$ возрастает на отрезке $[0, 1/4]$ и поэтому $\max PA \cdot PB \cdot PC = \sqrt{2}/4$ при $t = 1/4, x = 1/2$. Точка P является при этом серединой гипотенузы.

5. Степашка, отмечая победу в олимпиаде «Океан знаний», разлил шампанское по 2018 бокалам. Справедливый Хрюша пытается добиться, чтобы во всех бокалах было налито одинаково. Он берет два бокала и уравнивает количество шампанского в них. Сможет ли Степашка разлить так, чтобы попытки Хрюши оказались тщетными?

   □ Пусть Степашка наливает во все бокалы, кроме одного, по 1, а в один 2 (гр., единиц .... шампанского). Общее количество налитого равно 2019. При разделе поровну должно получиться по 2019/2018 в каждом бокале. Т.к. после уравнивания содержимого двух бокалов, содержащих A и B шампанского, в каждом получается по $(A+B)/2$, то после n переливаний число $2^n 2019/2018$ должно быть целым, что не так.