

ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет»  
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике  
2014-15 учебный год, отборочный (дистанционный) тур

1. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $DB:DC = 2:3$ . Найдите угол  $A$ .
2. Решите уравнение  $\sqrt{2 - |x|} = x^2 - 2$ .
3. Решите уравнение в целых числах  $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{16}{91}$ .
4. На счету Пети в банке 500 долларов. Петя может снять со счёта 300 долларов или положить на свой счёт 198 долларов. Какую максимальную сумму сможет снять Петя и за какое минимальное число операций, если у него нет других денег, кроме этих 500 на счёте?
5. Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих неравенству

$$5|x - 2| + 3|x + a| \leq \sqrt{4 - y^2} + 7.$$

6. Решите систему

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 2, \\ x^2y^3z^4 = 4, \\ x^2yz = 2. \end{cases}$$

7. Найдите все функции  $y = f(x)$ , для которых в  $D(f)$  выполняется тождество

$$f(x) - 2f\left(\frac{4 - 2x}{x + 2}\right) = 1.$$

8. Докажите неравенство  $\frac{2\cos x}{1 + \cos x} < \frac{\sin x}{x}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

9. Все координаты вектора отличны от нуля, сумма координат равна 1, а сумма их обратных величин равна нулю. Чему равна длина вектора?

10. Каждый город одной страны связан авиамаршрутом ровно с тремя другими городами этой страны. Из каждого города можно перелететь в другой, сделав не более двух пересадок. Сколько городов в стране?