РЕШЕНИЯ

1. Докажите, что если $sin\alpha = 4sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2}$, то треугольник с углами α, β и γ равнобедренный.

♦

$$sin\alpha - 4sin\frac{\alpha}{2}sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} = 0,$$

$$2sin\frac{\alpha}{2}\left(2sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

$$sin\frac{\alpha}{2}\left(2sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - \cos(\frac{\pi-\beta-\gamma}{2})\right) = 0,$$

$$sin\frac{\alpha}{2}\left(2sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) = 0,$$

$$sin\frac{\alpha}{2}\left(sin\frac{\beta}{2}cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) = 0,$$

$$sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

$$sin\frac{\alpha}{2} = 0 \text{ или } sin\frac{\beta-\gamma}{2} = 0.$$

Для углов треугольника отсюда можно сделать только один вывод

$$\beta = \gamma.$$

2. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \;\; a > 0, \\ z^2 + t^2 = b^2, \;\; b > 0, \\ \quad xt + yz = ab, \end{cases}$$

для которого величина $x + z$ принимает наибольшее значение.

♦ Левая часть последнего уравнения напоминает скалярное произведение в координатной форме. Воспользуемся этим. Рассмотрим её как скалярное произведение векторов $\vec{n}\{x; y\}$ и $\vec{m}\{t; z\}$. Тогда

$$|\vec{n}| = \sqrt{x^2 + y^2} = a, \qquad |\vec{m}| = \sqrt{z^2 + t^2} = b;$$

$$\vec{n} \cdot \vec{m} = xt + yz = ab.$$

С другой стороны по определению скалярного произведения

$$\vec{n}\cdot\vec{m} = abcos\alpha;\ \alpha - \text{угол между векторами};$$

$\vec{n}\cdot\vec{m} = ab \Longrightarrow cos\alpha = 1$; векторы коллинеарны, их координаты пропорциональны,

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{z} = \frac{a}{b};\ z = \frac{b}{a}y.$$

Тогда

$$x + z = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{b}{a}y.$$

Функция $f(y) = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{b}{a}y$ достигает максимума $\sqrt{a^2 + b^2}$ при $y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Отсюда

$$z = \frac{b}{a}y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$t^2 = b^2 - z^2 = b^2 - \frac{b^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Longrightarrow t = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$x^2 = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^4}{a^2 + b^2} \Longrightarrow x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, найдено решение, которое удовлетворяет условию задачи:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ z = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, t = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Докажем, что в любом решении системы числа x и t одного знака, а также, что числа y и z тоже одного знака. Оба произведения xt и yz не могут быть одновременно отрицательными. Предположим, что одно из них положительно, а другое отрицательно; например, $xt > 0,\ yz < 0$. Так как $|x| \le a$ и $|t| \le b$, то $xt \le ab \Longrightarrow xt + yz < ab$. Противоречие. С учётом этого все остальные решения можно получить подбором знаков плюс или минус

	x	y	z	t
1	+	+	+	+
2	+	−	−	+
3	−	+	+	−
4	−	−	−	−

♦ **Другое решение**. Вид первого уравнения системы $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ заставляет вспомнить теорему Пифагора и основное тригонометрическое тождество. Логична замена $\frac{x}{a}=cos\varphi,\ \frac{y}{a}=sin\varphi,\ z=bcos\psi,\ t=bsin\psi$. Из последнего уравнения системы имеем $cos\varphi sin\psi+sin\varphi cos\psi=1$;

$$\sin(\varphi+\psi)=1;\quad \varphi+\psi=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z;\quad \psi=\frac{\pi}{2}+2\pi k-\varphi.$$

$$x+z=acos\varphi+bcos\psi=acos\varphi+bsin\varphi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos(\varphi+\omega));$$

$$sin\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad tg\omega=\frac{b}{a};$$

преобразование провели с помощью метода введения дополнительного угла.

Наибольшее значение $\sqrt{a^2+b^2}$ принимает при $\cos(\varphi+\omega)=1$;

$\varphi+\omega=2\pi k, k\epsilon Z;\ \varphi=2\pi k-\omega;\ cos\varphi=cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Ответ:

$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$
$\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

3. Все коэффициенты квадратного трёхчлена – нечётные целые числа. Докажите, что у него нет рациональных корней.

♦ Пусть $a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\cdot\frac{p}{q}+c=0$, где a,b,c – нечётные целые числа; p и q взаимно простые целые числа. Упростим равенство $ap^2+bpq+cq^2=0$. Если p и q оба нечётные, то слева в равенстве нечётное число, а справа чётное. Противоречие. Если одно из них чётно, а другое нечётно, то в левой части одно слагаемое нечётно, а два чётные, их сумма – нечётное число, и оно не может равняться нулю.

4. На сторонах остроугольного треугольника найдите три точки, являющиеся вершинами треугольника с минимальным периметром.

♦ *Ответ*: вершины треугольника с минимальным периметром – основания высот исходного треугольника.

Пусть PQR – треугольник с минимальным периметром, вписанный в ABC; $P\epsilon AB,\ Q\epsilon BC,\ R\epsilon AC$. Отразим точку P симметрично относительно AC.

Получим точку P_1. Отразим точку P симметрично относительно BC. Получим точку P_2. Длина ломаной P_1RQP_2 равна периметру треугольника PQR. Длина ломаной больше, чем длина отрезка, соединяющего её концы. В силу минимальности периметра длина ломаной P_1RQP_2 равна длине отрезка P_1P_2. Поэтому точки P_1, R, Q, P_2 лежат на одной прямой. В треугольнике P_1CP_2 угол при вершине равен $2C$, боковые стороны равны CP. В нём чем меньше боковая сторона, тем меньше основание P_1P_2. Длина минимальной боковой стороны равна высоте треугольника ABC. Отсюда, CP – высота треугольника ABC. Аналогично доказывается, что Q и R — тоже основания высот.

5. Точка E – середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между прямыми AE и CA_1.

♦ Примем ребро куба за 1. Тогда $CA_1 = \sqrt{3}$. Проведём прямую через точку A_1 параллельно AE. Она пересекает продолжение ребра BB_1 в точке F, причём

$$B_1F = \frac{1}{2},\ A_1F = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1F^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Искомый угол равен углу CA_1F или смежному с ним. В треугольнике CA_1F

$$CF^2 = CA_1^2 + A_1F^2 - 2CA_1 \cdot A_1F \cdot cos\angle CA_1F,$$

$$\frac{13}{4} = 3 + \frac{5}{4} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot cos\angle CA_1F,$$

$$cos\angle CA_1F = \frac{\sqrt{15}}{15}, \qquad sin\angle CA_1F = \frac{\sqrt{210}}{15}, \qquad tg\angle CA_1F = \sqrt{14}.$$

Ответ: $\sqrt{14}$.

Критерии оценок:

Максимальное количество за одну задачу 7 баллов – дано полное обоснованное решение,

6 баллов – задача практически решена,

5 баллов – выявлены пути к полному решению задачи,

4 балла – приведены рассуждения или формулы, которые показывают существенное продвижение,

3 балла – приведены рассуждения или формулы, которые показывают некоторое продвижение,

2 балла – приведены рассуждения или формулы, которые можно рассматривать, как попытку решения задачи,

1 балл – была попытка решения,

0 баллов – нет попытки решения, т.е. нет дополнительных построений, нет формул, преобразований, вычислений, направленных на решение задачи.