

ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ»
по математике

1. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 6 различных цветов? Различными окрасками считаются окраски, которые не совмещаются при движении.

2. Докажите, что если α, β и γ – углы треугольника, то

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

3. Решите в натуральных числах уравнение $x^y + y^x = 945$.

4. Несколько человек решили сделать подарки друг другу следующим образом. Каждый приносит подарок. Подарки складываются вместе, перемешиваются и случайно распределяются среди участников. Найдите число распределений, в которых никто не получает собственный подарок, если в компании n человек.

5. Найдите значения параметра m , при которых уравнение имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию,

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0.$$

6. Наибольшее целое число $[x]$, не превышающее x , называется целой частью числа x , а $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа. Решите систему

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9, \\ y + [z] + \{x\} = 3,5, \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

7. Дано: $f(x + g(y)) = 2x + y + 5$ для всех x и y . Найдите $g(x + f(y))$.

8. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{5}{8}$?

9. Даны на плоскости: угол и точка внутри угла. Постройте квадрат, две вершины которого лежат на сторонах угла и одна вершина – в данной точке.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2 + y^2 \leq 4|x| + 6|y|$.