ФГАОУ ВПО «Дальневосточный федеральный университет», ФГБОУ ВДЦ «Океан»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике
Заключительный тур, 2014

# РЕШЕНИЯ

1. Решите уравнение $\arccos(3x^2) + 2arcsinx = 0$.

♦ Вычислим косинус от обеих частей уравнения $\arccos(3x^2) = -2arcsinx$,

$$3x^2 = \cos(-2arcsinx) = 1 - 2sin^2(arcsinx) = 1 - 2x^2;$$

$$3x^2 = 1 - 2x^2;$$

$$x^2 = \frac{1}{5}; \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Вместо проверки заметим, что $3x^2 \geq 0$;

$$0 \leq \arccos(3x^2) \leq \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2arcsinx \leq 0;$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq arcsinx \leq 0; \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0.$$

Ответ. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Решите систему

$$\begin{cases} x + y + 1 = xy, \\ y + z + 2 = yz, \\ x + z + 5 = xz. \end{cases}$$

♦ Преобразуем систему

$$(x-1)(y-1) = 2, (y-1)(z-1) = 3, (x-1)(z-1) = 6.$$

Замена $a = x - 1,\ b = y - 1,\ c = z - 1$ приводит систему к виду

$$\begin{cases} ab = 2, \\ bc = 3, \\ ac = 6. \end{cases}$$

Перемножим уравнения системы: $a^2b^2c^2 = 36$. Тогда $abc = 6$ или $abc = -6$. В первом случае $a = 2, b = 1, c = 3$, а во втором $a = -2, b = -1, c = -3$.

$x - 1 = \pm 2, y - 1 = \pm 1, z - 1 = \pm 3$. *Ответ*. (3; 2; 4), (–1; 0; –2).

3. Решите уравнение $x^2 - 10[x] + 9 = 0$, где $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее $x$; целая часть числа $x$.

♦ Так как $x^2 - 10x + 9 \leq x^2 - 10[x] + 9 = 0$, то $1 \leq x \leq 9$. Но $x^2 + 9 = 10[x]$, поэтому $x^2 + 9$ – целое число и делится на 10. Осталось перебрать значения $x^2 + 9$ от 10 до 90 и найти все значения $x$, удовлетворяющие нашему уравнению. *Ответ.* 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

4. Докажите, что любое натуральное число можно представить, и притом единственным образом, в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где $x$ и $y$ —натуральные числа.

♦ Докажем существование такого представления. Пусть $n$ — натуральное число, $m$ — максимальное натуральное число, для которого $\frac{m(m+1)}{2} \leq n$. Положим $x = n - \frac{m(m+1)}{2}$, $y = m - x$. Тогда

$$\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \frac{m^2 + m + 2n - m(m+1)}{2} = n.$$

Докажем единственность такого представления. Предположим, что две пары $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ представляют одно и то же число $n$. И пусть $(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) = s$ Тогда $n = \frac{s(s+1)}{2} + x_1 = \frac{s(s+1)}{2} + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow y_1 = y_2$. Если $(x_1 + y_1) < (x_2 + y_2)$, то

$$\begin{aligned} n = \frac{(x_2 + y_2)^2 + 3x_2 + y_2}{2} &= 1 + 2 + \cdots + x_2 + y_2 + x_2 \\ &= 1 + 2 + \cdots + (x_1 + y_1) + x_1 + y_1 + \cdots + x_2 + y_2 + x_2 \\ &> \frac{(x_1 + y_1)(x_1 + y_1 + 1)}{2} = n. \end{aligned}$$

Противоречие.

5. В основании пирамиды $TABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. Ребро $TA$ перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 25. Точка $M$ лежит на медиане $DL$ грани $CDT$, точка $N$ лежит на диагонали $BD$ и прямые $AM$ и $TN$ пересекаются. Определите длину отрезка $MN$, если $BN: ND = 3: 2$.

♦ Так как прямые $AM$ и $TN$ пересекаются, то точки $A, M, N$ и $T$ лежат в одной плоскости. Пусть $P$ — точка пересечения $TM$ и $AN$. Тогда

$$\frac{PN}{NA} = \frac{DN}{NB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{PN}{PA} = \frac{2}{5}.$$

Докажем, что $PM : PT = 2 : 5$. Заметим, что

$$\frac{DP}{BA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DP}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CD}{DP} = \frac{1}{2}.$$

Пусть точка $H$ ребра $CT$ такая, что $PH \parallel DL$. Тогда

$$\frac{CH}{HL} = \frac{CP}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{LT}{LH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{HL}{HT} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PM}{PT} = \frac{2}{5}.$$

Из подобия треугольников $PMN$ и $PTA$ следует, что

$$\frac{MN}{TA} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{MN}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow MN = 10.$$

*Ответ*. 10.