11 класс
Вариант 1
Ответы

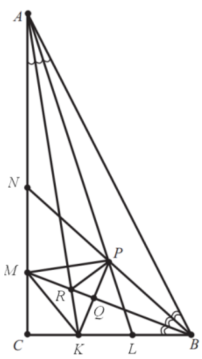
1) Если на листке написана семерка, то на обороте должна быть единица, потому что других чисел, делящих 7 или делящихся на 7, среди чисел от 1 до 10 нет. На обороте листка, где написана пятерка, могут быть только 1 или 10, но единица занята, поэтому там десятка. На обороте листка с девяткой могут быть только 1 или 3, поэтому там 3. Остались числа 2, 4, 6, 8. Из них на обороте листка с шестеркой может быть только двойка. Значит, на обороте листка с восьмеркой – четверка. Таким образом, числа на обороте листков однозначно восстанавливаются по числам на их лицевой стороне.

Ответ: на всех 10.

2) Пусть в каждой команде n студентов, x – число 7-местных кают, t_1 и t_2 – число команд, разместившихся на космическом корабле «Бельчонок-I» и «Бельчонок-II» соответственно. Тогда
$$\begin{cases} nt_1 = 5(x-1)+2; \\ nt_2 = 7x+4. \end{cases}$$
Исключая x, получаем, что $n(5t_2 - 7t_1) = 41$, то есть n – делитель простого числа 41.
Ответ: 41 (или 1).

3) Для удобства выполнения преобразований введем обозначения $a = 125$, $b = 106$, $c = 102$. Разложим на множители выражение $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$. Это выражение – кубический многочлен относительно a, два его корня, очевидно, b и c. Тогда третий корень по теореме Виета равен $\frac{-bc}{b+c}$. Раскладывая многочлен на множители, мы получим искомое разложение:
$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2) = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ac).$$
Очевидно, среди делителей заданного числа содержатся нечётные числа $125-106=19$, $125-102=23$. Этого достаточно, чтобы ответить на вопрос задачи.
Ответ: Да, например, 1, 19 и 23.

4) Пусть $\angle BAC = 3\alpha$. Тогда $\angle BAL = \angle LAK = \angle KAC = \alpha$. Кроме того, $\angle ABC = 90^\circ - 3\alpha$, откуда $\angle ABN = \angle NBM = \angle MBC = 30^\circ - \alpha$. Рассмотрим треугольник APB. В нём известны все углы ($\angle APB = 180^\circ - \alpha - (30^\circ - \alpha) = 150^\circ$). По теореме синусов $\frac{BP}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 150^\circ}$, откуда $BP = 2AB\sin\alpha$. Аналогично рассмотрим треугольник AKB: $\angle AKB = 180^\circ - 2\alpha - (90^\circ - 3\alpha) = 90^\circ + \alpha$; по теореме синусов $\frac{AB}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{KB}{\sin 2\alpha}$, откуда $KB = \frac{2AB\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(90^\circ+\alpha)} = 2AB\sin\alpha$. Получили, что у треугольника PBK равны стороны KB и PB. Но тогда его биссектриса BQ (здесь Q – точка пересечения отрезков BM и KP) является высотой и медианой треугольника KMP, поэтому $KM = MP$. Аналогично доказывается, что $KM = KP$.



5) Если n кратно 2 или 5, то разделить, очевидно, можно. Докажем, что в остальных случаях разрезать доску нельзя. Пусть n нечётно. Предположим, что можно разрезать доску в соответствие с условием задачи. Покрасим столбцы с нечётными номерами в чёрный цвет, а столбцы с чётными номерами – в белый цвет. Тогда на доске чёрных клеток на n больше, чем белых. Заметим, что в любом квадрате 2×2 чёрных и белых клеток поровну, а в квадрате 5×5 разность количества чёрных и белых клеток равна ± 5. Значит, в любом квадрате разность количества чёрных и белых клеток делится на 5. Так как квадраты не пересекаются, она делится на 5 и для всей доски. Но последнее означает, что n делится на 5.
Ответ: при n, кратном 2 или 5.

11 класс
Вариант 2
Ответы

1) Если на листке написана семерка, то на обороте должна быть единица, потому что других чисел, делящих 7 или делящихся на 7, среди чисел от 1 до 10 нет. На обороте листка, где написана пятерка, могут быть только 1 или 10, но единица занята, поэтому там десятка. На обороте листка с девяткой могут быть только 1 или 3, поэтому там 3. Остались числа 2, 4, 6, 8. Из них на обороте листка с шестеркой может быть только двойка. Значит, на обороте листка с восьмеркой – четверка. Таким образом, числа на обороте листков однозначно восстанавливаются по числам на их лицевой стороне.

Ответ: ни одного листка.

2) Пусть в каждой команде n студентов, x – число 3-местных кают, t_1 и t_2 – число команд, разместившихся на космическом корабле «Бельчонок-I» и «Бельчонок-II» соответственно. Тогда

$$\begin{cases} nt_1 = 3x + 4; \\ nt_2 = 5(x + 5) + 2. \end{cases}$$

Исключая x, получаем, что $n(3t_2 - 5t_1) = 61$, то есть n – делитель простого числа 61.

Ответ: 61 (или 1).

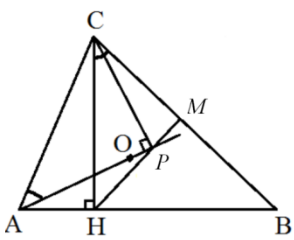
3) Для удобства выполнения преобразований введем обозначения $a = 125$, $b = 108$, $c = 106$. Разложим на множители выражение $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$. Это выражение – кубический многочлен относительно a, два его корня, очевидно, b и c. Тогда третий корень по теореме Виета равен $\frac{-bc}{b+c}$. Раскладывая многочлен на множители, мы получим искомое разложение:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ac).$$

Очевидно, среди делителей заданного числа содержатся нечётные числа $125 - 108 = 17$, $125 - 106 = 19$. Этого достаточно, чтобы ответить на вопрос задачи.

Ответ: Да, например, 1, 17 и 19.

4) Докажем сначала, что $\angle CAO + \angle ABC = 90^\circ$. Заметим, что поскольку O – центр описанной окружности, то треугольники AOB, BOC, COA равнобедренные. Обозначим их углы при основании через x, y и z соответственно. Тогда получим $2x + 2y + 2z = 180^\circ$ (общая сумма углов), а $\angle CAO + \angle ABC = z + x + y = 90^\circ$. Аналогично это доказывается и для случая, когда O лежит вне треугольника (или на его стороне). Заметим, что и $\angle BCH = 90^\circ - \angle ABC$, поэтому $\angle CAO = \angle BCH$ (или, что то же самое, $\angle CAP = \angle BCH$). Теперь заметим, что четырехугольник $CPHA$ – вписанный, поскольку $\angle AHC = \angle APC = 90^\circ$. Значит, $\angle CAP = \angle CHP$ (или, что то же самое, $\angle CAP = \angle BCH$). Объединяя всё вместе, получаем, что в треугольнике BCH равны $\angle BCH$ и $\angle CHM$. Значит, $CM = MH$. Для прямоугольного треугольника BCH имеем $\angle B = 90^\circ - \angle BCH = 90^\circ - \angle CHM = \angle MHB$, поэтому $BM = MH$. Окончательно, $BM = CM$.



Ответ: 1.

5) Если n кратно 2 или 3, то разделить, очевидно, можно. Докажем, что в остальных случаях разрезать доску нельзя. Пусть n нечётно. Предположим, что можно разрезать доску в соответствие с условием задачи. Покрасим столбцы с нечётными номерами в чёрный цвет, а столбцы с чётными номерами – в белый цвет. Тогда на доске чёрных клеток на n больше, чем белых. Заметим, что в любом квадрате 2×2 чёрных и белых клеток поровну, а в квадрате 3×3 разность количества чёрных и белых клеток равна ±3. Значит, в любом квадрате разность количества чёрных и белых клеток делится на 3. Так как квадраты не пересекаются, она делится на 3 и для всей доски. Но последнее означает, что n делится на 3.

Ответ: при n, кратном 2 или 3.