10 класс
1 вариант
Ответы

1) Поскольку $8 = 2^3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $504 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2^3$, то $b = 7 \cdot 3^a \cdot 2^c$, где $a = 0, 1, 2$, а $c = 0, 1, 2, 3$. Поэтому b может принимать $3 \cdot 4 = 12$ значений.
Ответ: 12.
2) Обозначим число всех прямых n. Разобьём все проведённые прямые на группы прямых, параллельных между собой. Пусть таких групп k. Прямые каждой группы пересекаются с одними и теми же прямыми, которых 101. Поэтому в каждой группе содержится $n - 101$ прямых. Отсюда $n = k(n - 101)$, то есть $101k = n(k - 1)$. Так как числа k и $k - 1$ взаимно просты, то 101 (а это число простое) делится на $k - 1$. Значит, $k - 1 = 101$ или $k - 1 = 1$. Соответственно $n = 102$ или 202.
Ответ: 102 или 202.
3) Каждому пятизначному числу соответствует не более чем пятизначное число в троичной системе счисления. Соответствие достигается заменой цифры 1 на 0, 2 на 1, 5 на 2. Нулю соответствует число 11111. Представим число 100 в троичной системе счисления. Поскольку $100 = 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 1$, то в троичной системе это дает число 10201, которое согласно нашему соответствию превращается в 21512. Это сто первое число, если считать от нуля, который соответствует числу 11111. Поэтому на 100-м месте стоит предыдущее число 21511.
Ответ: 21511.
4) Так как $OA = r/sin(A/2)$, $OB = r/sin(B/2)$ и $OC = r/sin(C/2)$, а углы $\angle A/2$, $\angle B/2$ и $\angle C/2$ острые, то $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. Следовательно (по принципу Дирихле), $\angle A \leq 60^\circ$ и $\angle B \leq 90^\circ$, а значит, $sin\left(\frac{A}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ и $sin\left(\frac{B}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $OA \geq 2r$ и $OB \geq r\sqrt{2}$, то есть $OA^2 \geq 4r^2$ и $OB^2 \geq 2r^2$.
5) Обозначим место на дорожке, где сидели бельчата, через О, место, где лежала шишка. к которой побежал проворный бельчонок, через П, а место, где лежала шишка. к которой пошел ленивый бельчонок, через Л. Очевидно, что П и Л находятся по разные стороны от О, и П находится дальше от дерева с дуплом, чем Л. Пусть расстояния от О до П и Л равны x и y (км) соответственно ($x < y$), скорость бельчат с шишками равна v км/ч. На путь от О до Л ленивый бельчонок затратил $\frac{y}{3}$ часов, а проворный – $\frac{x}{7} + \frac{x+y}{v}$ часов. Из условия следует, что $\frac{y}{3} < \frac{x}{7} + \frac{x+y}{v} < \frac{y}{7} + \frac{2y}{v}$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 10{,}5$. Осталось проверить, что скорость, с которой бельчата должны были бежать с шишками, могла равняться 10 км/ч. Для этого в неравенстве $\frac{y}{3} < \frac{x}{7} + \frac{x+y}{v}$ положим $v = 10$ и равносильно преобразуем его к виду $\frac{y}{x} < \frac{51}{49}$. Последнее возможно (например, при $y = 0{,}0052$ км $= 5{,}2$ м, $x = 0{,}005$ км $= 5$ м).
Ответ: 10 км/час.

10 класс
2 вариант
Ответы

1) Если ни одно из чисел не равняется 1000, то одно из чисел a, b должно содержать 2^3, а другое 5^3. Одно из чисел имеет вид $2^3 \cdot 5^d$ $(d = 0, 1, 2)$, другое число имеет вид $2^c \cdot 5^3$ $(c = 0, 1, 2)$. Таких пар будет $3 \cdot 3 = 9$. Каждая пара содержит различные элементы, поэтому их можно переставлять. Всего получается 18 пар.

Ответ: 18.

2) Обозначим число всех плоскостей n. Разобьём все плоскости на группы плоскостей, параллельных между собой. Пусть таких групп k. Плоскости каждой группы пересекаются с одними и теми же плоскостями, которых 61. Поэтому в каждой группе содержится $n - 61$ плоскостей. Отсюда $n = k(n - 61)$, то есть $61k = n(k - 1)$. Так как числа k и $k - 1$ взаимно просты, то 61 (а это число простое) делится на $k - 1$. Значит, $k - 1 = 61$ или $k - 1 = 1$. Соответственно $n = 62$ или 122.

Ответ: 62 или 122.

3) Каждому пятизначному числу соответствует не более чем пятизначное число в троичной системе счисления. Соответствие достигается заменой цифры 4 на 0, 6 на 1, 9 на 2. Числу 64649, таким образом, соответствует троичное число 10102, которое при переводе в десятичную систему превращается в $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 92$. Это девяносто третье число, если считать от нуля, который соответствует числу 44444.

Ответ: 93.

4) $\angle POQ = 180^\circ - \angle ABC$, но $\angle POQ = \angle AOC = 90^\circ + \angle ABC/2$. Отсюда находим, что $\angle ABC = 60^\circ$. BO – биссектриса угла PBQ, значит, $\angle OBQ = 30^\circ$. Обозначим r – радиус вписанной окружности треугольника ABC, а r_1 – радиус окружности, описанной около четырёхугольника $PBQO$. Тогда $r_1 = QO/(2\sin 30°) = QO \geq r$, т.к. O – центр вписанной окружности треугольника ABC (точка пересечения его биссектрис), а r – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону AB.

Ответ: нет.

5) Обозначим место, где стояли братья, через А, место ближайшей остановки через В, а место другой остановки через С. Очевидно, что В и С находятся по разные стороны от А, и В находится дальше от стадиона, чем С. Пусть расстояния от А до В и С равны x и y метров соответственно $(x < y)$, скорость троллейбуса равна v км/ч. На путь от А до С старший брат затратил $y/5$ часов, а младший – $x/8 + (x + y)/v$ часов. Из условия следует, что $y/5 < x/8 + (x + y)/v < y/8 + 2y/v$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26,(6)$. Осталось проверить, что скорость, с которой бельчата должны были бежать с шишками, могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $y/5 < x/8 + (x + y)/v$ положим $v = 26$ и преобразуем его к виду $y/x < 85/84$. Последнее возможно (например, при $y = 0{,}17\,км = 170\,м$, $x = 0{,}169\,км = 169\,м$).

Ответ: 26 км/час.