ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015-2016

Заочный тур

10 класс

1. Каждый день от станций Москва и Нью-Васюки одновременно навстречу друг другу выезжают два поезда. Раньше поезда ездили с одинаковой скоростью, но в последнее время один из них был модернизирован: теперь за то же время он проходит на 50% большее расстояние. Определить, на сколько процентов быстрее происходит теперь встреча поездов
2. Найти сумму целых решений неравенства $\frac{x}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq |\sqrt{5-x} - 1| + x^2$.
3. В четырехзначном числе число тысяч совпадает с числом сотен, а число десятков равно числу единиц. Известно, что это число является квадратом целого числа. Найти это число.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 25$. На основании AC произвольным образом выбрали точки $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$. Каждая из этих точек является вершиной угла, стороны которого параллельны боковым сторонам AB и BC и пересекаются с этими сторонами в точках $C_1, C_2, \dots, C_{2015}$ и $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$ соответственно. Найти сумму периметров четырехугольников $A_i B C_i B_i$, где $i = 1, 2, \dots, 2015$.
5. Средний возраст сотрудников фирмы равен их количеству. 39-летняя сотрудница ушла в декрет и после этого оказалось, что средний возраст оставшихся сотрудников фирмы снова стал равен их количеству. Сколько сотрудников на фирме?
6. В Москве, на новой скоростной трассе, друг за другом двинулись Бугатти Вейрон со скоростью 300 км/ч и машина ГИБДД со скоростью 200 км/ч. Когда между машинами было 30 километров, в далеком Тифлисе навстречу друг другу двинулись арба, запряженная волон, и Ходжа Насреддин на осле. В этот же момент от вола отделилась муха и начала летать между волон и ослом. В момент, когда Бугатти врезалась в столб, между ней и машиной ГИБДД было расстояние 100 километров. Какое расстояние за это время пролетела муха, если ее скорость 20 км/ч?
7. При каком значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 6x - \sqrt{a+9} = 0$ имеет три различных корня, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии?
8. Клетки, пронумерованные от 1 до 1000, расположены от меньшего к большему по кругу. Блоха Фрося в начальный момент времени находится в клетке №1. Затем она прыгает в клетку №16, затем – в клетку №31 и так далее до бесконечности. Останутся ли клетки, в которые не попадет Фрося? Если да, то сколько их? (Блоха Фрося может прыгать только в одном направлении).
9. Найти значение $f\left(\frac{1}{15}\right)$, если известно, что: $2f(x) + 3f(-x) = 5 - 3x$.
10. Площадь S некоторого треугольника выражается через длины его сторон a и b формулой $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Найти радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника, если $S = 4$.