

ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015/2016 очный тур

10 класс

1. В школьной математической олимпиаде участвовало четыре класса. Всего участвовало 20 человек, причем известно: хотя бы один представитель каждого класса присутствовал и решил хотя бы одну задачу. Любые два ученика одного класса решили одинаковое количество задач, а любые два ученика из разных классов – разное количество задач. Всего было решено 26 задач. Сколько учеников решили ровно одну задачу?

2. Найти все натуральные числа, удовлетворяющие уравнению:

$$4n^3 - 4n = 2016.$$

3. Пятеро отдыхающих встретились в Крыму и завели разговор о том, кто где живет.
Маша: Я живу в Париже, как и Владислав, а Петя живет в Москве.
Владислав: Я живу в Тьмутаракани, как и Коля, а Петя живет в Москве.
Петя: Я, как и Маша, не живу в России. Лена же живет в Томске.
Лена: Моя мама живет в Париже, папа в Лондоне, а я в Мадриде.
Коля: Маша и Владислав живут в Париже, а я сам обитаю в Мадриде.
Определить, где живут участники разговора, если каждый из них два раза сказал правду и один солгал.

4. Найти стороны четырех различных прямоугольных треугольников, выраженные целыми числами. Известно, что у всех треугольников гипотенуза равна 260.

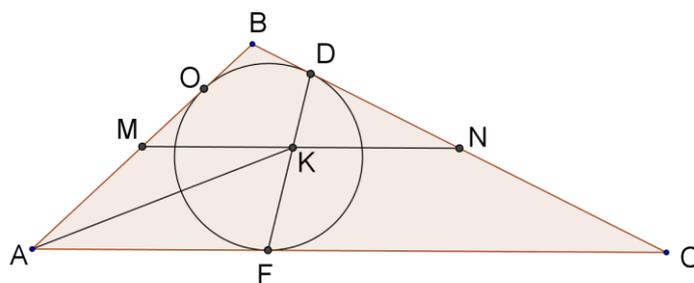
5. Волобуев пригласил агента застраховать своих детей. Придя к нему, агент спросил: «Сколько у вас детей и сколько им лет»? «У меня 3 сына – сказал Волобуев. – Произведение их лет равно 72, а сумма их лет равна номеру моей квартиры». Агент вышел, взглянул на номер квартиры и сказал, что задача не может быть решена однозначно. «Да, - сказал Волобуев, - но я надеюсь, что мой старший сын поступит в РЭУ им. Г.В.Плеханова». Сколько лет детям?

6. Решить уравнение:

$$4x^4 + 4x^3 + 2x = 1.$$

7. По статистике 58% семей с двумя или более детьми используют материнский капитал на улучшение жилищных условий. При этом в семьях с двумя детьми так распоряжаются материнским капиталом в 50% случаев, а в многодетных семьях – в 70% случаев. Какова вероятность того, что семья, использовавшая материнский капитал на улучшение жилищных условий, является многодетной?

8. В треугольник ABC вписана окружность. Точки F и D – точки касания окружности со сторонами AC и BC соответственно. Средняя линия MN данного треугольника, параллельная стороне AC , пересекает отрезок FD в точке K . Доказать, что AK – биссектриса угла A .



9. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}}$$

Найдите формулу для x_n .

10. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Кроме того, известно, что $BD = a$, $DC = b$, $\angle BDC = 90^\circ$. Найти отношение площадей граней ADB и ADC .

